



CIMPA-UCR

Análisis en Componentes Principales

ACP



ACP: resumen

Situación: se tiene una tabla de datos cuantitativos

Objetivo:

- obtener una representación en pocas dimensiones de los objetos, perdiendo el mínimo de información
- obtener (pocas) variables sintéticas, basadas en las variables originales y no correlacionadas entre ellas
- son objetivos equivalentes

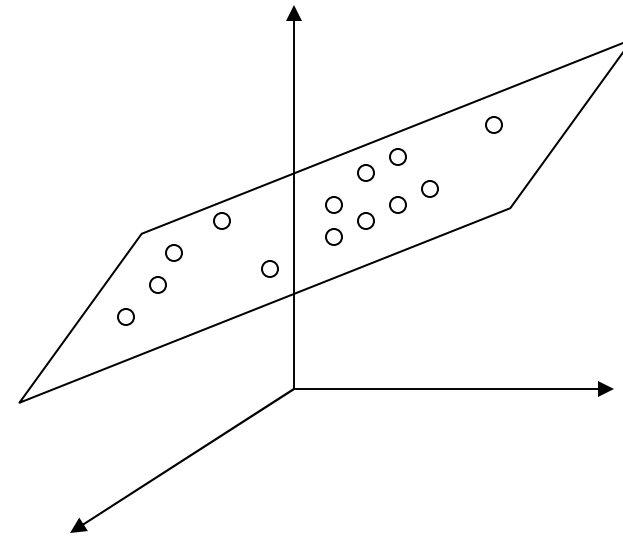
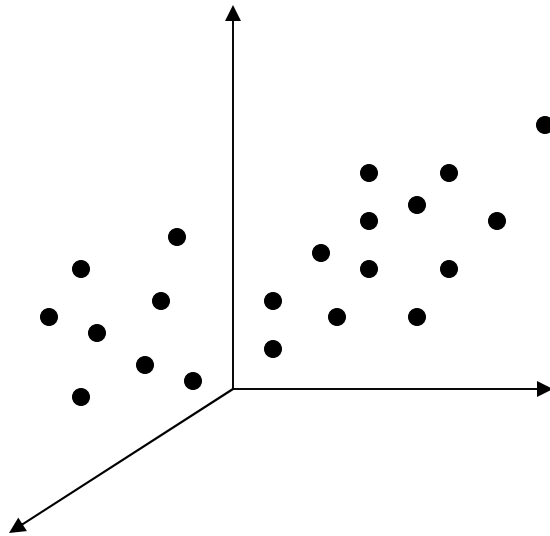
Solución matemática: calcular los valores y vectores propios de la matriz de correlaciones

Variables sintéticas → componentes principales

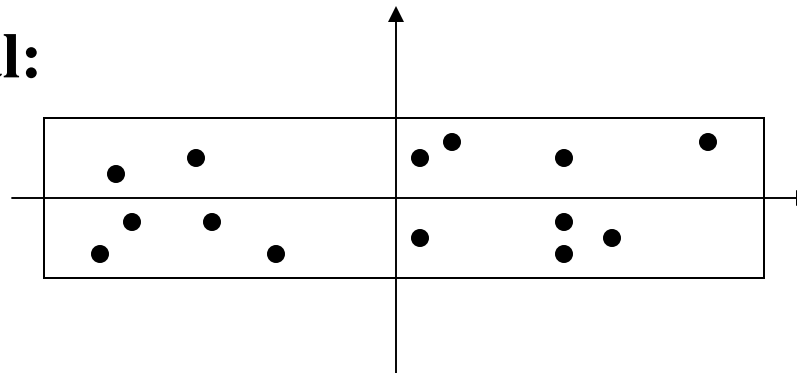


CIMPA-UCR

ACP: Ilustración



Plano principal:

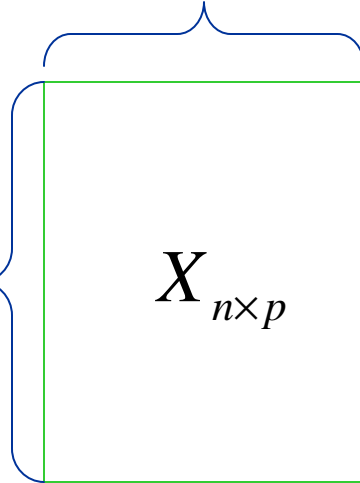




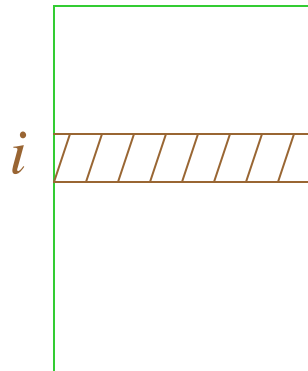
ACP: Los Datos

p variables cuantitativas

n individuos



$$X = (x_i^j)_{n \times p}$$



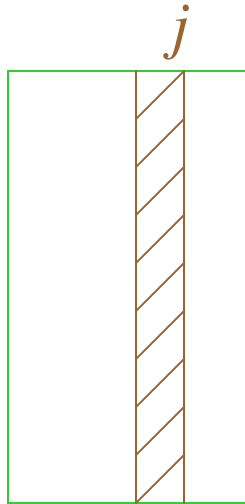
Fila i representa al individuo i -ésimo: x_i

$$\vec{x}_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^p)^T = \sum_{j=1}^p x_i^j \underline{e}_j$$



CIMPA-UCR

ACP: Los Datos



Columna j representa a la variable j -ésima: x^j

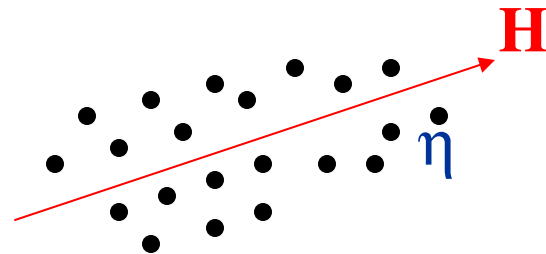
$$\vec{x}^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_n^j)^T = \sum_{i=1}^n x_i^j \underline{f}_i$$

Las variables son cuantitativas.

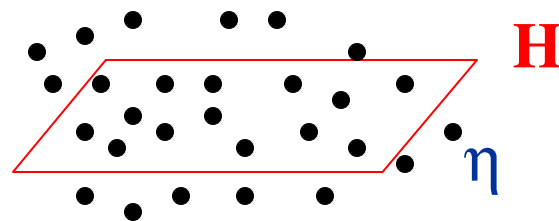


ACP: Objetivos

1. Buscar la recta de mejor ajuste de la nube η



2. Buscar el plano de mejor ajuste en la nube η



4. Buscar el espacio de mejor ajuste de la nube η

⋮
ETC.



Ajuste en ACP

MEJOR AJUSTE: que se respeten lo mejor posible las distancias entre los individuos.

$$\underset{(H)}{\text{Max}} \left\{ \sum_i \sum_{i'} d_H^2(i, i') \right\} \Leftrightarrow \underset{(H)}{\text{Max}} \left\{ \sum_i d_H^2(i, \vec{0}) \right\}$$

TEOREMA: El plano de mejor ajuste contiene a la recta de mejor ajuste.

El espacio de mejor ajuste contiene al plano de mejor ajuste.

.....



ACP: Objetivo dual

Encontrar q variables sintéticas $\vec{c}^{\rightarrow 1}, \vec{c}^{\rightarrow 2}, \dots, \vec{c}^{\rightarrow q}$:

- combinación lineal de las $\vec{x}^{\rightarrow j}$
- no correlacionadas entre sí: $\rho\left(\vec{c}^{\rightarrow k}, \vec{c}^{\rightarrow k'}\right) = 0$
- que contengan el máximo de información:

varianza máximo: $MaxVar\left(\vec{c}^{\rightarrow k}\right)$

Criterio:

“máxima información”

Varianza máxima

Inercia proyectada máxima

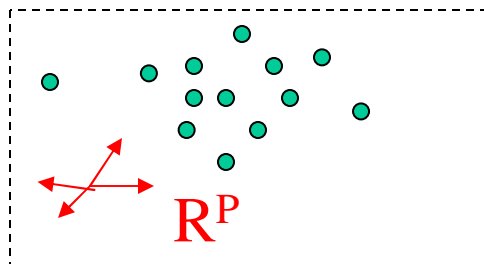
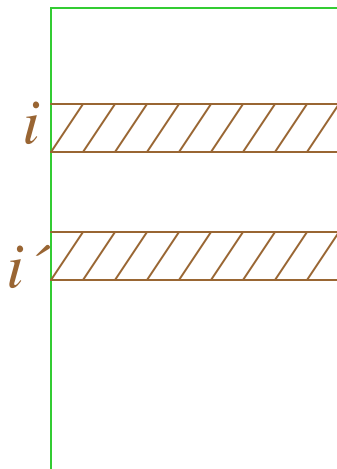
Error mínimo



CIMPA-UCR

ACP: Principios Geométricos

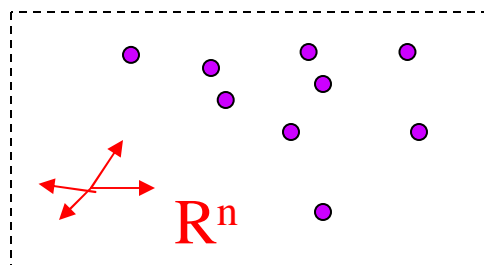
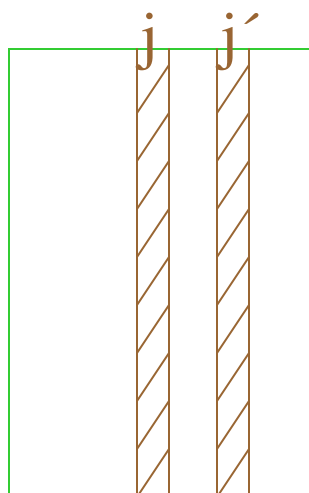
FILAS



n puntos en R^p

DISTANCIA:
$$d^2(i, i') = \sum_{j=1}^p (x_{ij} - x_{i'j})^2$$

COLUMNAS



p puntos en R^n

DISTANCIA:
$$d^2(j, j') = \sum_{i=1}^n (x_i^j - x_i^{j'})^2$$



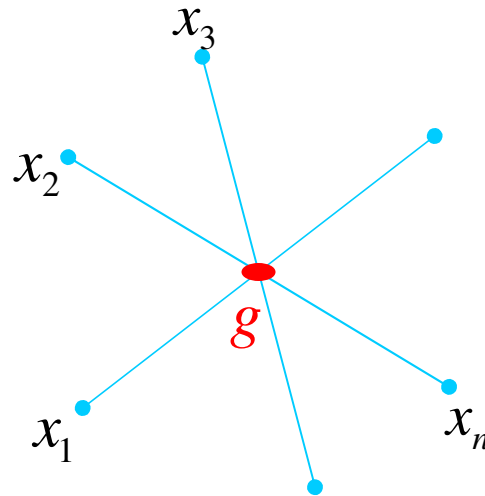
CIMPA-UCR

Inercia: concepto intuitivo

Nube de puntos: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in R^p$

p variables centradas: $\bar{x}^j = 0 \quad (\rightarrow \vec{g} = \vec{0})$

$$I(N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\vec{x}_i, \vec{0}) \rightarrow \text{Dispersión de la nube}$$





Inercia

Proximidad de la nube \mathbf{N} a un punto \underline{a} : $I_a = \sum_i \|x_i - \underline{a}\|^2$

Teorema de Huyghens: $I_a = I_g + \|\underline{a}\|^2$

\therefore Mínimo de la I_a cuando $\underline{a} = g$

Sea $M = I$

Si M es identidad: $I_g = \text{traza } V$

$$\begin{aligned} I_g &= \sum_i \|x_i\|^2 = \sum_i \left\| \sum_j x_i^j f_j \right\|^2 = \sum_i \sum_j \|x_i^j f_j\|^2 = \sum_i \sum_j (x_i^j)^2 \|f_j\|^2 \\ &= \sum_i \sum_j (x_i^j)^2 = \sum_j \sum_i (x_i^j)^2 = \sum_j \text{var}(x^j) = \text{traza } V \end{aligned}$$

$$I_g = I_H + I_H^\perp$$



CIMPA-UCR

Inercia proyectada

Inercia proyectada:

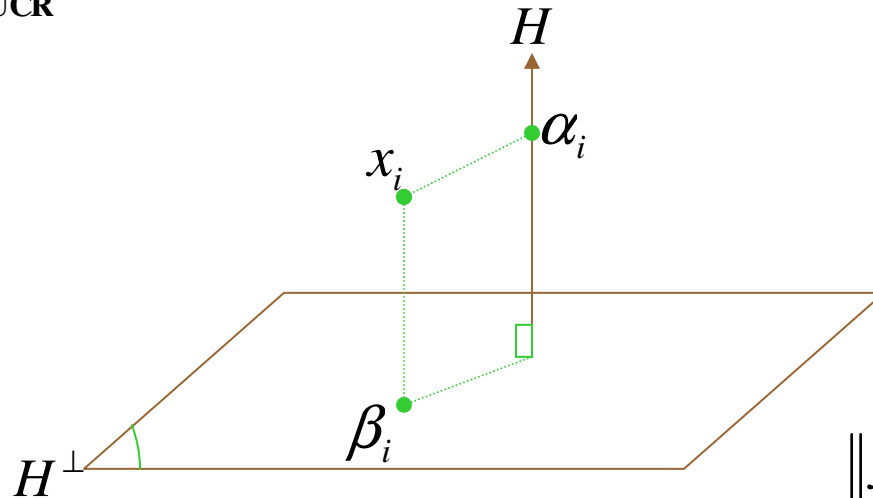
$$I(\tilde{N}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{x}_i, 0)$$

Dispersión multidimensional



CIMPA-UCR

Inercia proyectada



$$x_i = \alpha_i + \beta_i \quad \alpha_i \perp \beta_i$$

Por Teorema de Pitágoras

$$\|x_i\|^2 = \|\alpha_i + \beta_i\|^2 = \|\alpha_i\|^2 + \|\beta_i\|^2$$

Sumando:

$$\sum_i p_i \|x_i\|^2 = \sum_i p_i \|\alpha_i\|^2 + \sum_i p_i \|\beta_i\|^2$$

$$\Rightarrow I_g(N) = I_{H^\perp}(N) + I_H(N)$$

Proximidad entre N y el subespacio H :

$$I_H(N) = \sum_{i=1}^n p_i \|x_i - \alpha_i\|^2 = \sum_i p_i \|\beta_i\|^2$$



Teorema de inclusión

Sea E_{k-1} óptimo $\dim(E_{k-1}) = k - 1$

$\Rightarrow E_{k-1} \leq E_k$ con E_k : óptimo, $\dim(E_k) = k$

Sea $F_k \leq E$, $\dim(F_k) = k$

Sea $H = F_k + E_{k-1}^\perp$

$F_k \cap E_{k-1}^\perp \neq \{0\}$ pues $\dim(F_k) = k$

$\dim(E_{k-1}^\perp) = p - (k - 1) = p - k + 1$

$\Rightarrow \exists v \neq 0, v \in F_k \cap E_{k-1}^\perp$. Sea Δv : eje gen. v

Sea G : suplementario M -ortogonal de Δv : en F_k :

$$F_k = G \oplus \Delta v$$



Teorema de inclusión

Sea $E_k = E_{k-1} \oplus \Delta v$

Entonces:

$$I_{F_k}(N) = I_G(N) + I_{\Delta v}(N)$$

$$I_{E_k}(N) = I_{E_{k-1}}(N) + I_{\Delta v}(N)$$



mín

$$I_{E_{k-1}}(N) \leq I_G(N) \Rightarrow I_{E_k}(N) \leq I_{F_k}(N)$$

Por construcción, $E_{k-1} \leq E_k$



Cálculo de los ejes principales

Sea E_{k-1} óptimo de dimensión $k-1$

Para cualquier F_k de dim k que contiene a E_{k-1} :

$$\exists v / F_k = E_{k-1} \oplus \Delta v \quad \text{con } \Delta v \perp_M E_{k-1}$$

$$\Rightarrow I_{F_k}(N) = I_{E_{k-1}}(N) + I_{\Delta v}(N)$$

$I_{F_k}(N)$ se minimiza si $I_{\Delta v}(N)$ es mínima

Procedimiento:

1. Buscar eje $E_1 = \Delta v_1 / I_{\Delta v_1}(N)$ sea mínima
2. Buscar eje $\Delta v_2, v_2 \perp_M v_1 / I_{\Delta v_2}(N)$ sea mínima
- ⋮
- k. Buscar eje $\Delta v_k, v_k \perp_M E_{k-1} / I_{\Delta v_k}(N)$ sea mínima



Táctica del ACP

1. Buscar la recta $\Delta u_1 : I_{\Delta u_1}$ sea mínima, $\|u_1\| = 1$
 2. Buscar la recta $\Delta u_2 : I_{\Delta u_2}$ sea mínima, $\|u_2\| = 1, u_1 \perp u_2$
 3. Buscar la recta $\Delta u_3 : I_{\Delta u_3}$ sea mínima, $\|u_3\| = 1, u_3 \perp u_1, u_3 \perp u_2$
- ‖ ETC.

$$I_g = I_{\Delta u} + I_{\Delta u^\perp}$$

$\therefore I_{\Delta u}$ es Mínimo $\Leftrightarrow I_{\Delta u^\perp}$ es Máximo

$$\boxed{I_{\Delta u^\perp} = u^t MVMu} \quad \|u_1\|_M = 1$$

Sea α_i proyección de x_i sobre u : $\vec{\alpha}_i = c_i \vec{u} \quad c_i = \langle \vec{x}_i, \vec{u} \rangle = x_i^T Mu$

$$I_{\Delta u^\perp} = \sum \pi_i \|\vec{\alpha}_i\|_M^2 = \sum \pi_i \|\chi_i \vec{v}\|_M^2 = \sum \pi_i \chi_i^2 = v^T M \epsilon \epsilon^T \Delta \epsilon M v = v^T M_\zeta M v$$



CIMPA-UCR

ACP: Primer Eje

Recta $\Delta u \leftrightarrow$ Vector u , $\|u\| = 1$:

$I_{\Delta u}$ sea mínima

$\Leftrightarrow I_{\Delta u}^\perp$ sea máxima

PROBLEMA: $Max\{F(u) = u^T MVMu\}$ **RESTRICCIÓN:** $\|u\|^2 = 1$

SOLUCIÓN: $L(u, \lambda) = u^T MVMu - \lambda(u^T Mu - 1)$

POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2VMu - 2\lambda u = \bar{0} \Rightarrow VMu = \lambda u$$

$\Rightarrow u$ es vector propio de VM



ACP: Primer Eje

$$F(u) = u^T MVMu = u^T M(\lambda u) = \lambda u^T Mu = \lambda 1 = \lambda$$

∴ F es máximo si λ es máximo

PRIMER EJE: Δu_1

Con u_1 unitario, vector propio asociado a λ_1 el mayor valor propio de la matriz VM



CIMPA-UCR

ACP: Segundo Eje

$$\therefore 2VMu - 2\lambda Mu = 0 \Rightarrow VMu = \lambda Mu$$

\therefore es vector propio de V y $F(u) = \lambda$

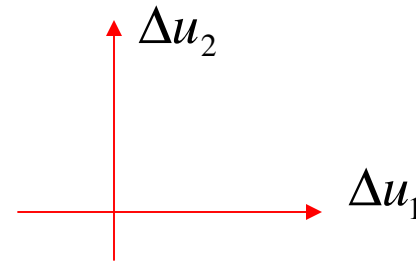
$\therefore u$ está asociado a λ_2 , el segundo valor propio de VM

PLANO PRINCIPAL: Generado a u_1 y u_2 , vect. Propios de V asociados a λ_1 y λ_2 los dos primeros valores propios de V

EJES PRINCIPALES

$$u_1, u_2, \dots, u_k$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$$



Vectores propios de VM , asociados a los primeros k valores propios de VM .



CIMPA-UCR

Análisis en Componentes Principales

ACP Normado

Para eliminar el efecto de escala en las variables:

P. ej: PESO Gramos, Onzas, Kilogramos, etc.

$$x_i^j \leftrightarrow \frac{x_i^j - \bar{x}^j}{\sigma_j} \quad \sigma_j: \text{desv. Estándar de variable } x^j$$

Matriz a diagonalizar: $R = D_{1/\sigma} V D_{1/\sigma}$

Ejes Principales: Vectores propios de R

$$\text{var}(x^j) = 1, \forall j$$

$$\begin{aligned} \therefore d^2(x^j, x^k) &= \text{var}(x^j) + \text{var}(x^k) - 2\text{corr}(x^j, x^k) \\ &= 2(1 - \text{corr}(x^j, x^k)) \end{aligned}$$



ACP: notas escolares

	MATE	CIEN.	ESPA	HIS.	GIM
LUCIA	7.0	6.5	9.2	8.6	8.0
PEDRO	7.5	9.4	7.3	7.0	7.0
INES	7.6	9.2	8.0	8.0	7.5
LUIS	5.0	6.5	6.5	7.0	9.0
ANDRES	6.0	6.0	7.8	8.9	7.3
ANA	7.8	9.6	7.7	8.0	6.5
CARLOS	6.3	6.4	8.2	9.0	7.2
JOSE	7.9	9.7	7.5	8.0	6.0
SONIA	6.0	6.0	6.5	5.5	8.7
MARÍA	6.8	7.2	8.7	9.0	7.0
PROM	6.79	7.65	7.74	7.9	7.42



Correlaciones

	MATE	CIEN	ESPA	HISTO	GIM
MATE	1	0.85	0.38	0.21	-0.79
CIEN	0.85	1	-0.02	-0.02	-0.69
ESPA	0.38	-0.02	1	0.82	-0.37
HISTO	0.21	-0.02	0.82	1	-0.51
GIM	-0.79	-0.69	-0.37	-0.51	1

¿Cómo resumir esta información?

¿Cómo “proyectar” en pocas dimensiones?

¿Cómo obtener variables sintéticas?



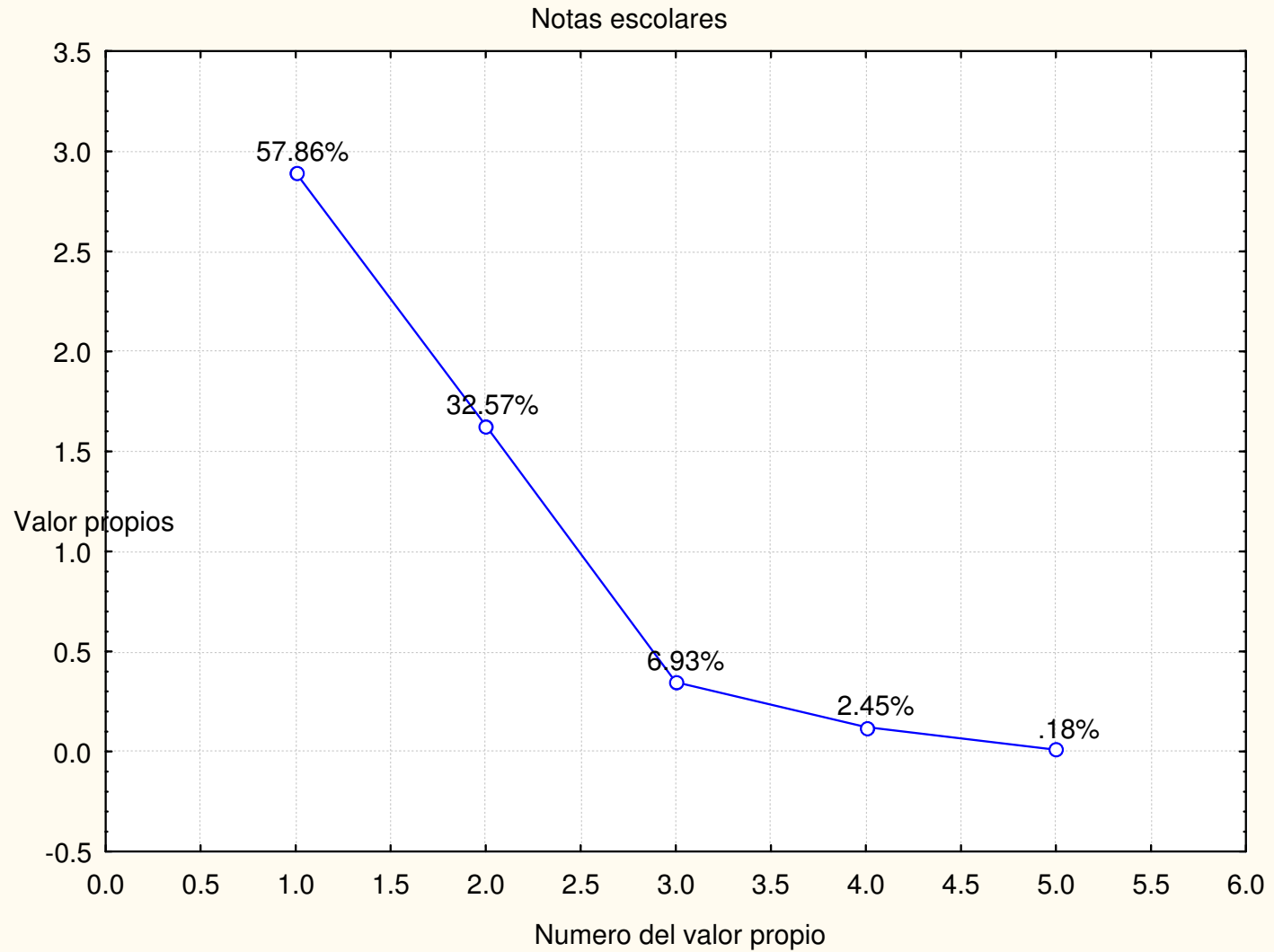
Valores propios

VALORES PROPIO		VARIANZA	ACUMULADA
1	2.89	57.9%	57.9%
2	1.63	32.6%	90.4%
3	0.35	6.9%	97.4%
4	0.12	2.4%	99.8%
5	0.01	0.2%	100.0%



CIMPA-UCR

Grafico de valores propios





CIMPA-UCR

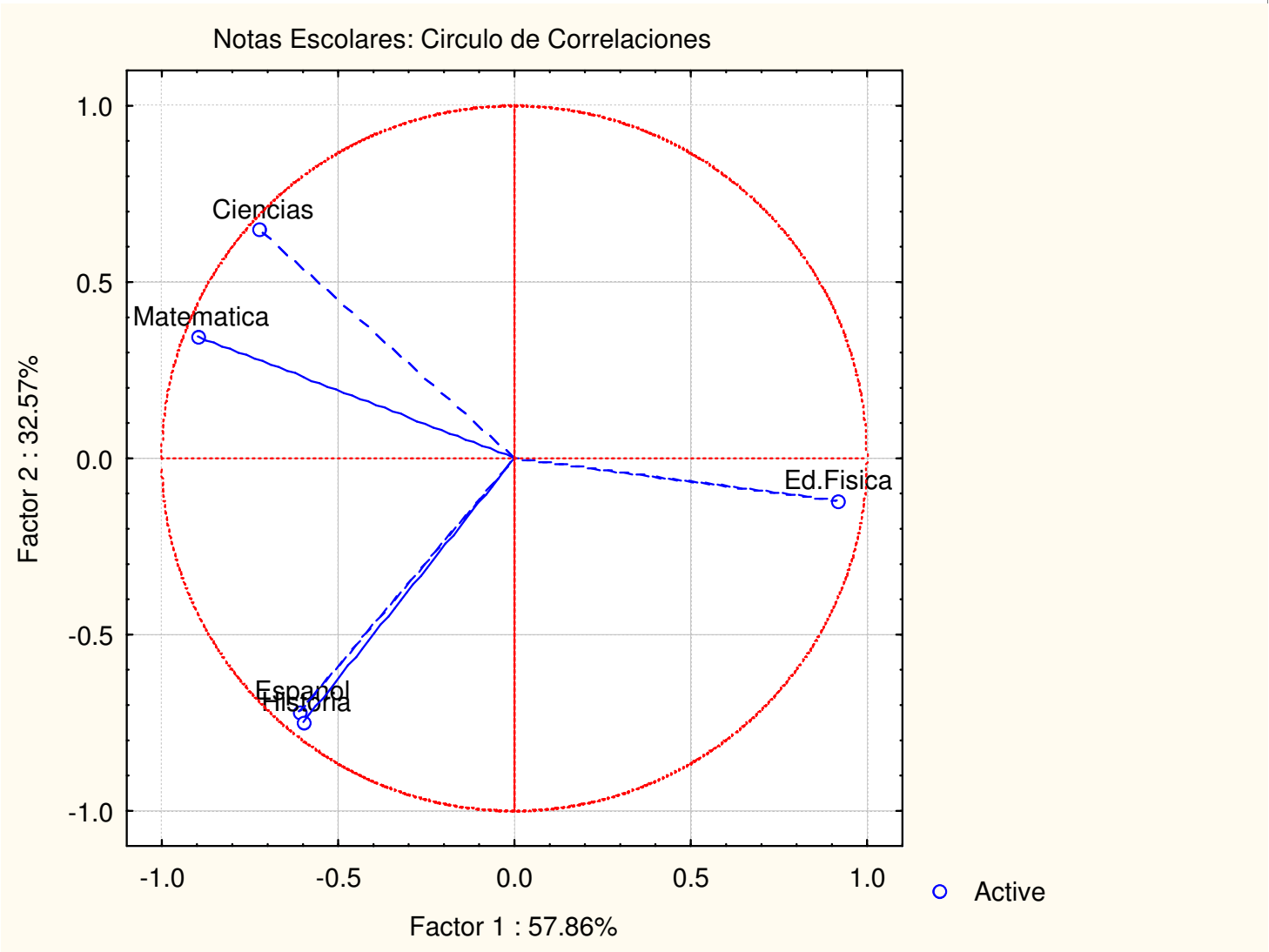
Correlaciones Principales

	MATEM	CIEN	ESPA	HISTO	GIM
COMP.1	-0.90	-0.72	-0.61	-0.60	0.91
COMP.2	0.35	0.65	-0.72	-0.75	-0.2



CIMPA-UCR

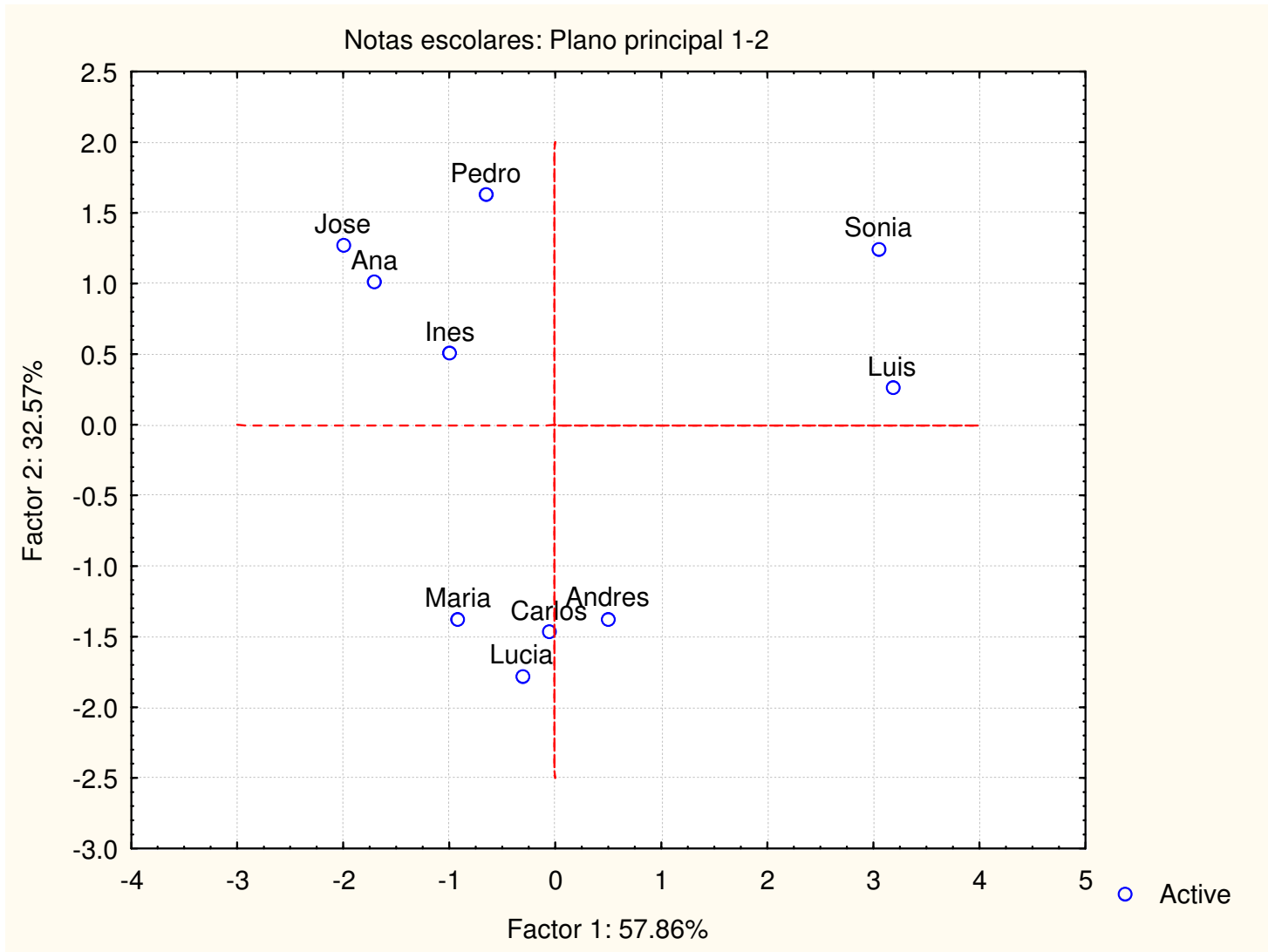
Círculo de Correlaciones





CIMPA-UCR

Plano Principal





CIMPA-UCR

Análisis en Componentes Principales

Tabla de notas francesas

	MATE	FISC.	FRAN	LATN
JEAN	6	6	5	5.5
ALAIN	8	8	8	8
ANNE	6	7	11	9.5
DIDIER	14	14	12	12.5
ANDRE	11	10	5.5	7
MONIQUE	14.5	14.5	15.5	15
PIERRE	5.5	7	14	11.5
BRIGITTE	13	12.5	8.5	9.5
EVELYNE	9	9.5	12.5	12



Matriz de correlaciones

	MATE	FISC	FRAN	LATN
MATE	1	0.983	0.227	0.508
FISC		1	0.397	0.652
FRAN			1	0.951
LATN				1



Valores propios

NÚMERO	VALOR PROPIO	% TRAZA	% ACUMULADO
1	2.88	71.892	71.892
2	1.12	27.992	99.884
3	0.00	0.089	99.974
4	0.00	0.026	100.000



CIMPA-UCR

Análisis en Componentes Principales

Calidad de la representación

	EJE 1	EJE 2	EJE 3	COS 1	COS 2	COS 3	CALID. 3
JEAN	2.74	-0.43	0.02	97.616	2.370	0.007	99.993
ALAIN	1.24	-0.15	0.00	98.474	1.493	0.001	99.968
ANNE	1.03	1.05	-0.06	49.039	50.804	0.157	99.999
DIDIER	-2.05	-0.63	-0.02	91.353	8.556	0.013	99.922
ANDRE	0.97	-1.50	0.03	29.573	70.348	0.021	99.943
MONIQUE	-3.14	0.19	0.01	99.627	0.349	0.001	99.977
PIERRE	0.33	1.94	-0.06	2.896	97.023	0.079	99.998
BRIGITTE	-0.62	-1.29	-0.07	18.711	81.068	0.213	99.993
EVELYNE	-0.51	0.82	0.14	27.140	70.782	2.022	99.944



ACP: Solución

- Diagonalizar la matriz de varianzas-covarianzas VM

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \text{ valor propio de } VM \\ \vec{v} \text{ vector propio de } VM \end{array} \right\} : VM\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

- Caso estandarizado: diagonalizar R (matriz de correlaciones)

- $\lambda_i > 0$

- P vectores propios: ortogonales de norma 1 $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$

Componentes Principales

$$\vec{C}^j = XM\vec{u}_j$$

Propiedades:

$$\cdot \text{var}(C^j) = \lambda_j$$

$$\cdot \vec{C}^j = 0$$

$$\cdot \rho(C^j, C^k) = 0$$

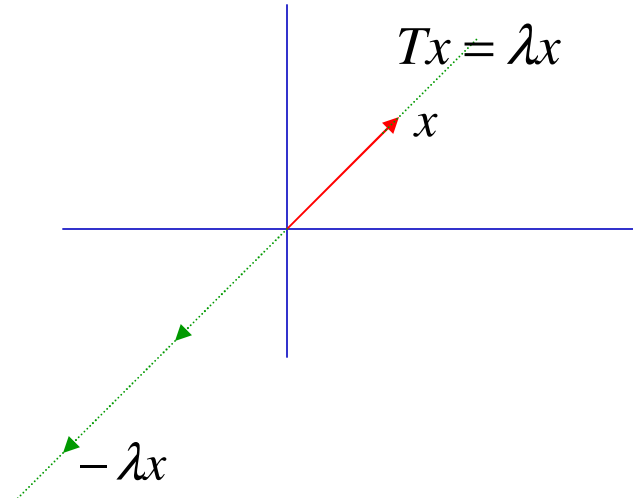
(ortogonales)



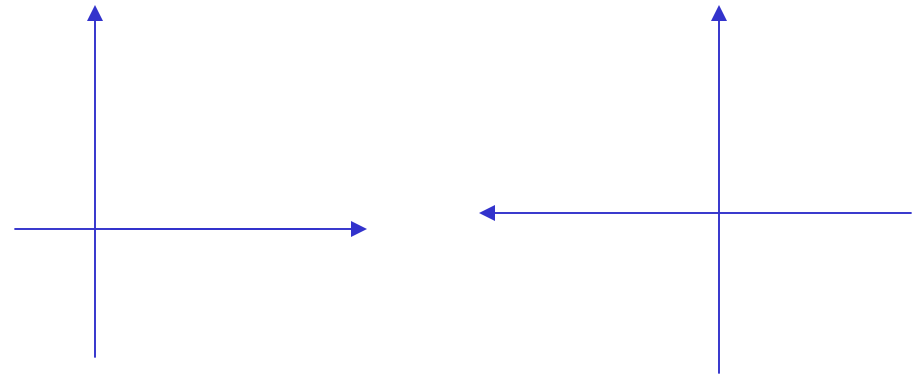
Signo del valor propio

El signo es arbitrario

$$Vx = \lambda x$$



$$V(-x) = -Vx = -(\lambda x) = \lambda(-x)$$



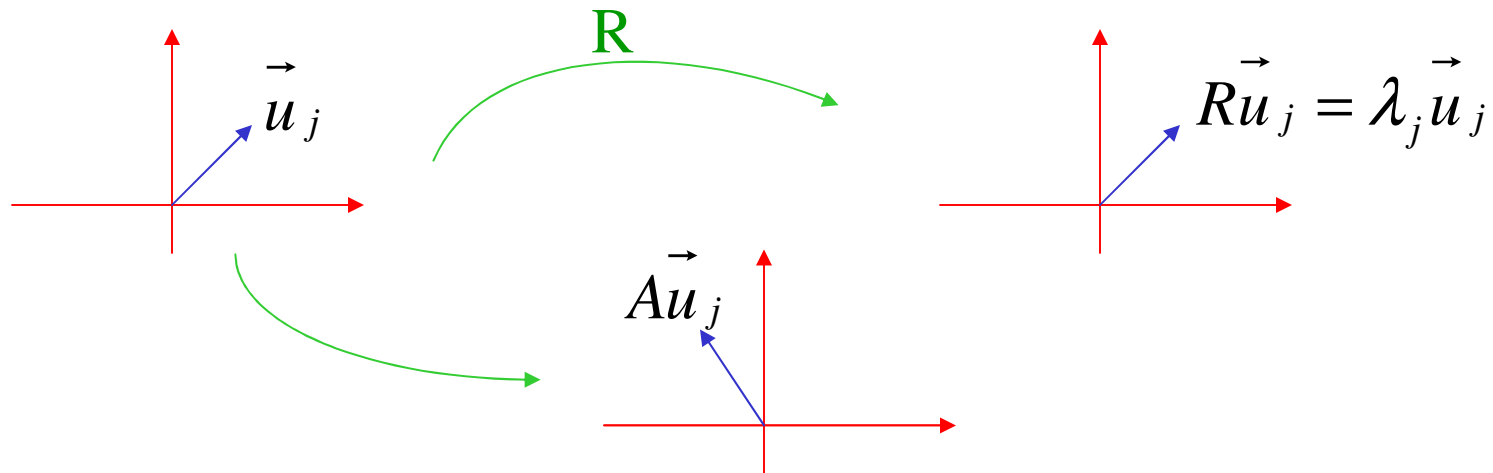


Diagonalizar la matriz de correlaciones

$$R = (r_{jk})_{p \times p}, r_{jk} = \rho(x^j, x^k)$$

Existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p \geq 0$ y existen vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p \in R$

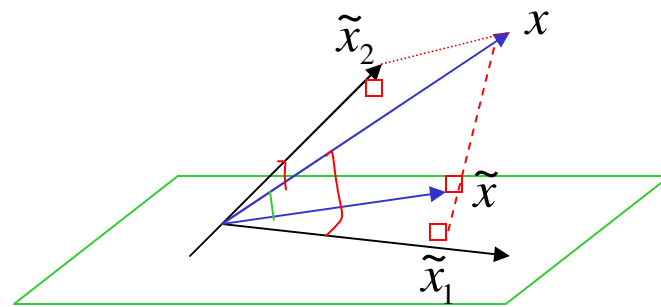
tales que: $R\vec{u}_j = \lambda_j \vec{u}_j$



Signo: $R(-\vec{u}_j) = -R\vec{u}_j = -\lambda_j \vec{u}_j = \lambda_j (-\vec{u}_j)$



Consecuencia del Teorema de Pitágoras



$$\cos^2 \theta = \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\|x\|^2}$$

Por T. Pitágoras: $\|x\|^2 = \|\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2\|^2 = \|\tilde{x}_1\|^2 + \|\tilde{x}_2\|^2$

$$\cos^2 \theta = \frac{\|\tilde{x}_1\|^2 + \|\tilde{x}_2\|^2}{\|x\|^2} = \frac{\|\tilde{x}_1\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|\tilde{x}_2\|^2}{\|x\|^2}$$

$$= \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2$$



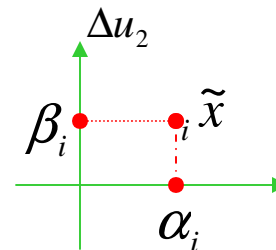
Representación de los individuos

Reconstruir las posiciones originales de los individuos en el plano principal: $\Delta u_1 \oplus \Delta u_2$

Se proyecta x_i en Δu_1 y en Δu_2

En Δu_1 : $\alpha_i = c_i \vec{u}_1, c_i = X_i^T M u_1$

En Δu_2 : $\beta_i = d_i \vec{u}_2, d_i = X_i^T M u_2$



\tilde{x}_i : proyección de \vec{x}_i

$$\cos^2 \theta = \frac{\|\tilde{x}_i\|_M^2}{\|x_i\|_M^2}$$

Calidad de la Representación:



CIMPA-UCR

Representación de las variables

Examinar las correlaciones
principales

$$\rho^2(x^j, C^k) \geq 0.5$$



Calidad de la representación

Sea \vec{u}_i un eje principal: $I_{\Delta u_k^\perp} = \lambda_k$

$$I_{\Delta u_k^\perp} = \lambda u_k^T M V M u_k = u_k^T M (\lambda_k u_k) = \lambda_k (u_k^T M u_k) = \lambda_k$$

λ_k es la inercia explicada por el eje Δu_k

Inercia total: $I(N) = \text{traza}(VM) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$

$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}$ % de Inercia explicada por el eje principal

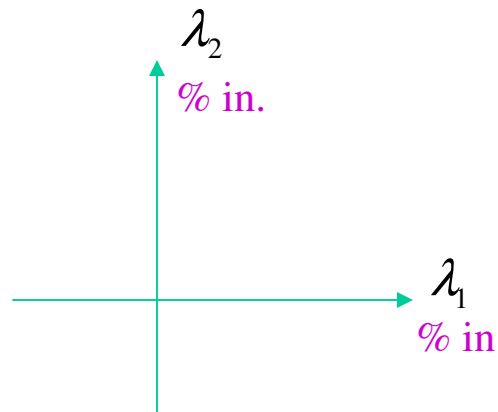
$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}$ % de Inercia explicada por el plano principal



Calidad de la representación

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}$$

% de Inercia explicada por los k primeros ejes principales



Valores Propios

	VAP	% Inercia	% Acumulado
λ_1		40%	40%
λ_2		20%	60%
λ_3		15%	75%

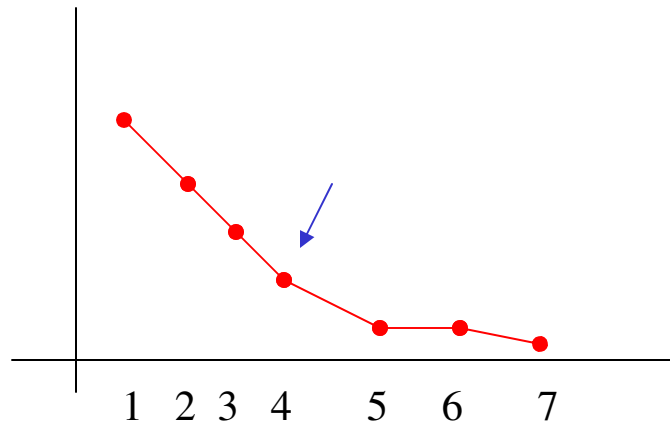


Número de ejes

1. Inercia explicada mínima:

$$\vec{c}^1, \vec{c}^2, \dots, \vec{c}^k \quad \text{tq} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_q \geq \text{mín}\%I(N)$$

2. Criterio del codo:



3. Interpretabilidad:

Individuos: $\cos^2(x_i, \hat{x}_i) \geq 0.5$

Variables: $\left| \rho \left(\vec{c}^k, \vec{x}^j \right) \right| \geq 0.7$



CIMPA-UCR

Número de ejes (cont.)

4. Si $M = D_{1/\sigma}$ variables estandarizadas $\Rightarrow \text{var}\left(\vec{x}^j\right) = 1$

Tomar solo \vec{c}^k tq $\lambda_k \geq 1$ ($\lambda_k = \text{var}\left(\vec{c}^k\right)$)

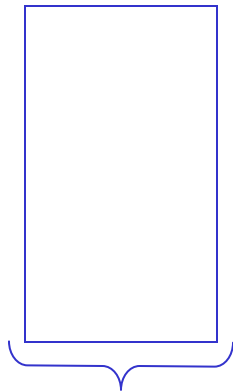
5. Información independiente: número equivalente



CIMPA-UCR

Variables suplementarias

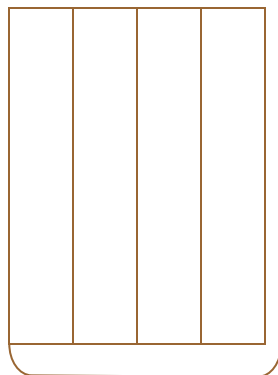
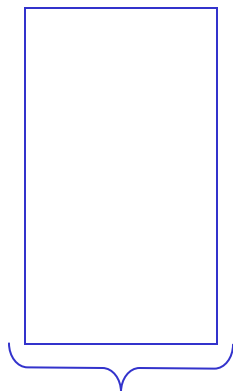
Variable cuantitativa



Z: centrada

Análisis Z

Variable cualitativa



Variable Nominal
con m modalidades

Análisis m



CIMPA-UCR

Interpretación de resultados

Interpretar es **dar sentido**

- a) Situación de un punto respecto al conjunto de filas y columnas → la tabla.
 - b) Elementos suplementarios: referencia.
 - c) Experiencia del analista
- Inercia de los factores
 - valores propios
 - % inercia
 - # factores



CIMPA-UCR

Interpretación de resultados

- Interpretación de los factores
 - contribución de individuos
 - variables activas: *eje x, *planos
 - variables suplementarias: **ampliar el contexto**
 - coordenadas de los individuos: **aspecto general, prototipos, tipologías**
 - individuos suplementarios

Casos particulares:

- factor ~ elemento aberrante
- factor de oposición
- factor ~ grupo
- factor ~ participación
- factor de escala
- efecto talla



Datos de prediagnóstico

1.	Calinda	220 x 3
2.	Las Juntas	240 x 3
3.	Cartagena	235 x 3
4.	San Pablo	240 x 3
5.	El Esfuerzo	240 x 3
6.	Palo Verde	239 x 3



Variables

- Circunferencia de la madre (cm)

CircMadr

- Altura del Hijo (cm)

AltHijo

- Número de manos

#Manos



Individuos

- 3 sitios por finca:
 - Bueno (B)
 - Medio (M)
 - Pobre (P)
- 20 casos para cada sitio
- 4 repeticiones c/u
- Total: 240 casos (en teoría) por finca



CIMPA-UCR

Correlaciones

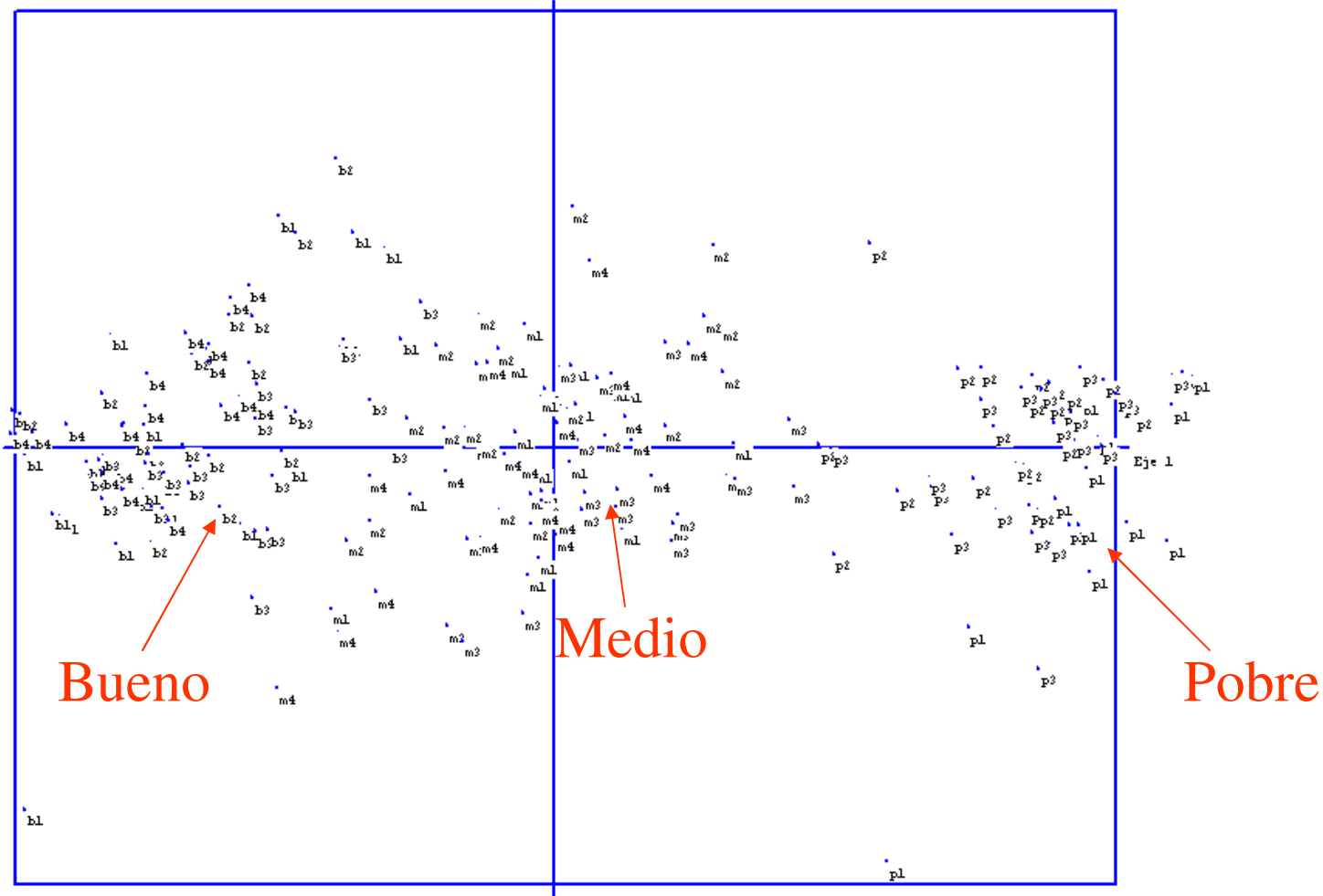
	CircMadre AltHijo	CircMadre #Manos	AltHijo #Manos
Calinda	0.617	0.870	0.658
Cartagena	0.689	0.881	0.670
El Esfuerzo	0.734	0.816	0.617
Las Juntas	0.717	0.756	0.645
Palo Verde	0.682	0.685	0.597
San Pablo	0.730	0.851	0.731



CIMPA-UCR

Calinda: ACP completo

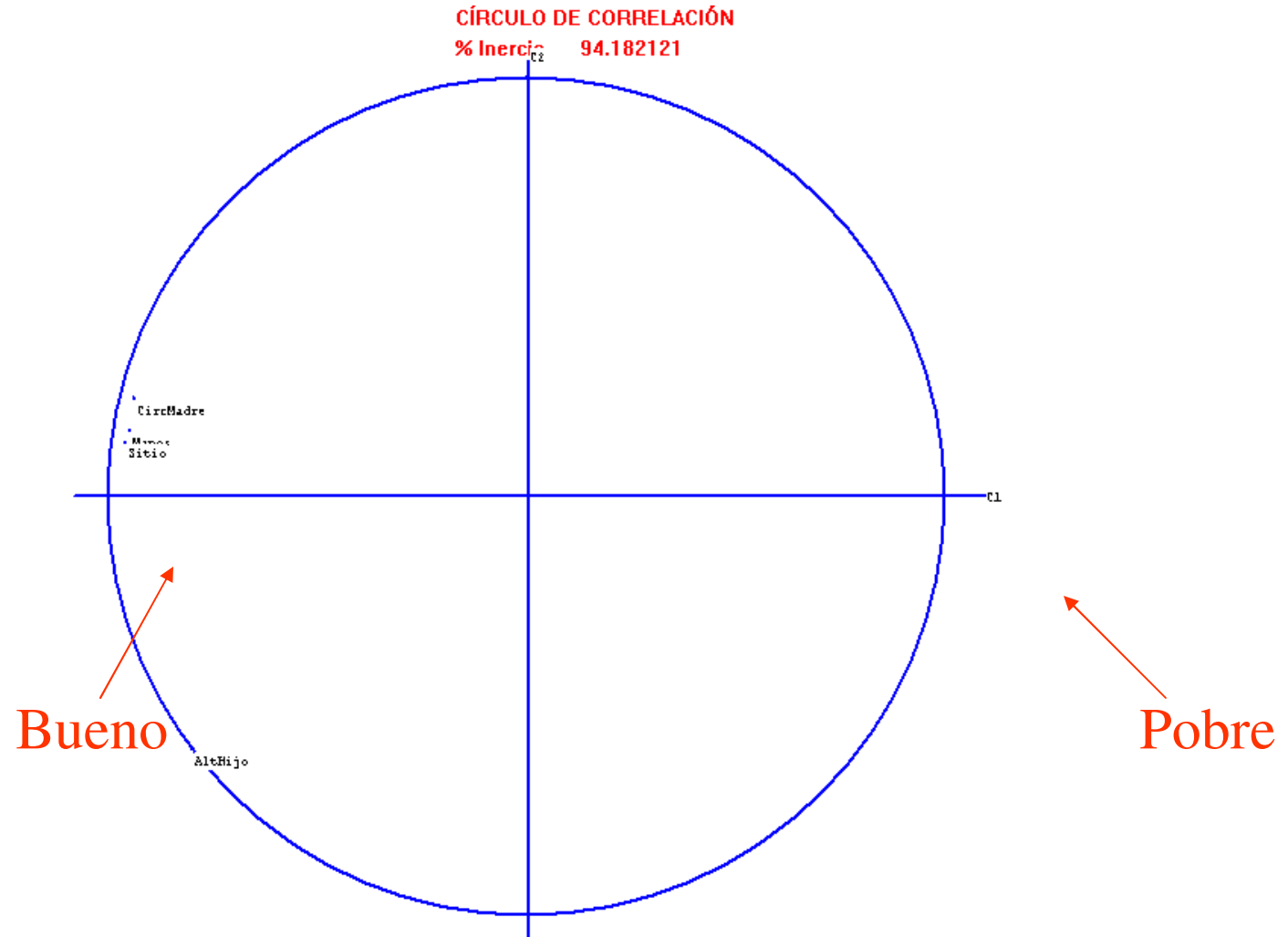
PLANO PRINCIPAL
% InEje 1: 94.182121





CIMPA-UCR

Calinda: ACP completo

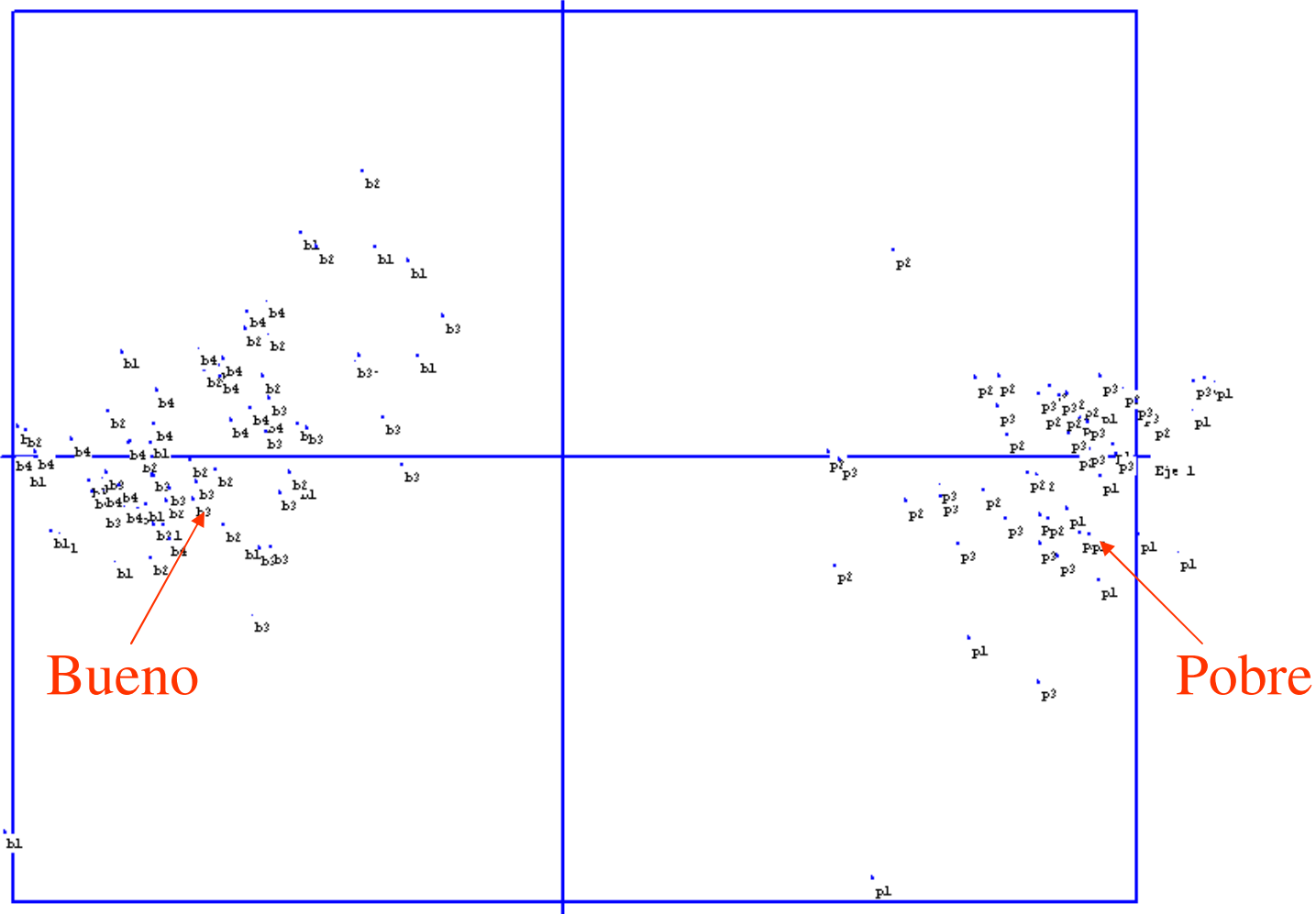




CIMPA-UCR

Calinda: ACP sin sitio medio

PLANO PRINCIPAL
% ln Eje 1 96.419594



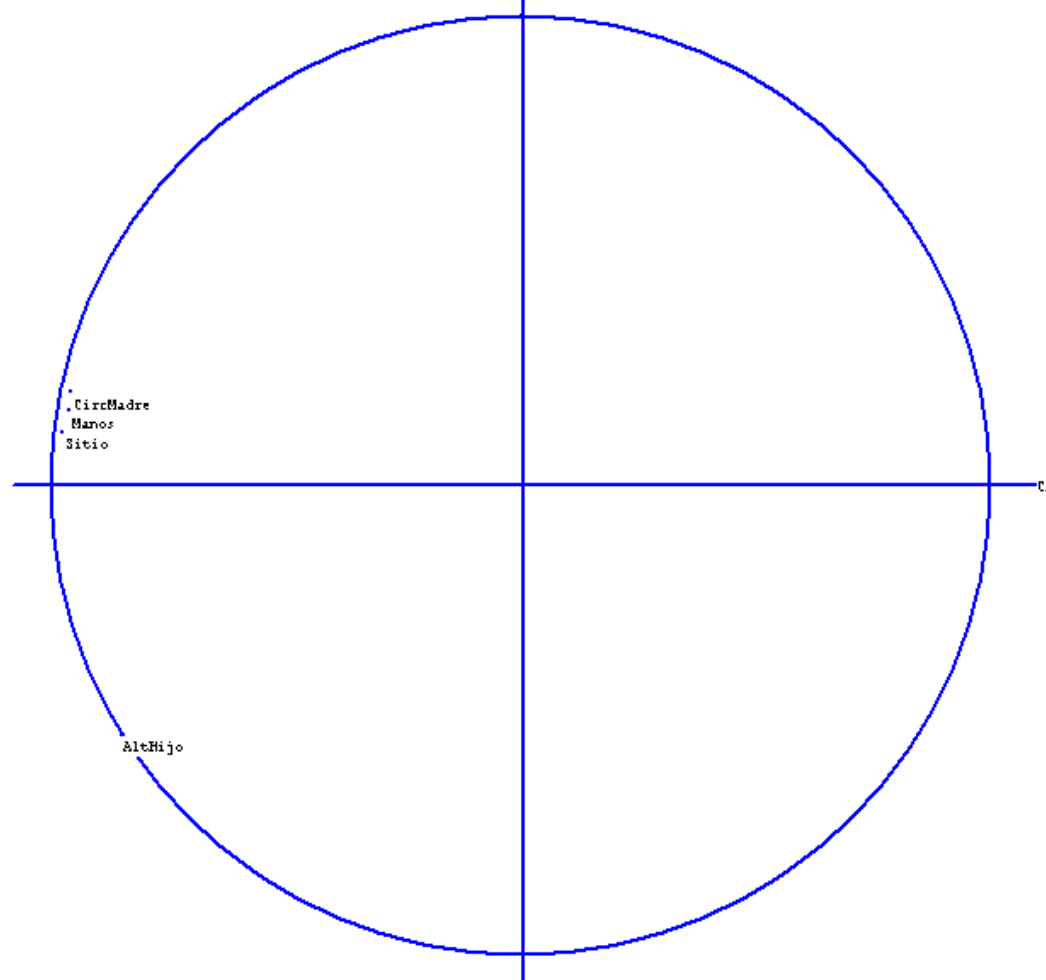


CIMPA-UCR

Calinda: ACP sin sitio medio

CÍRCULO DE CORRELACIÓN

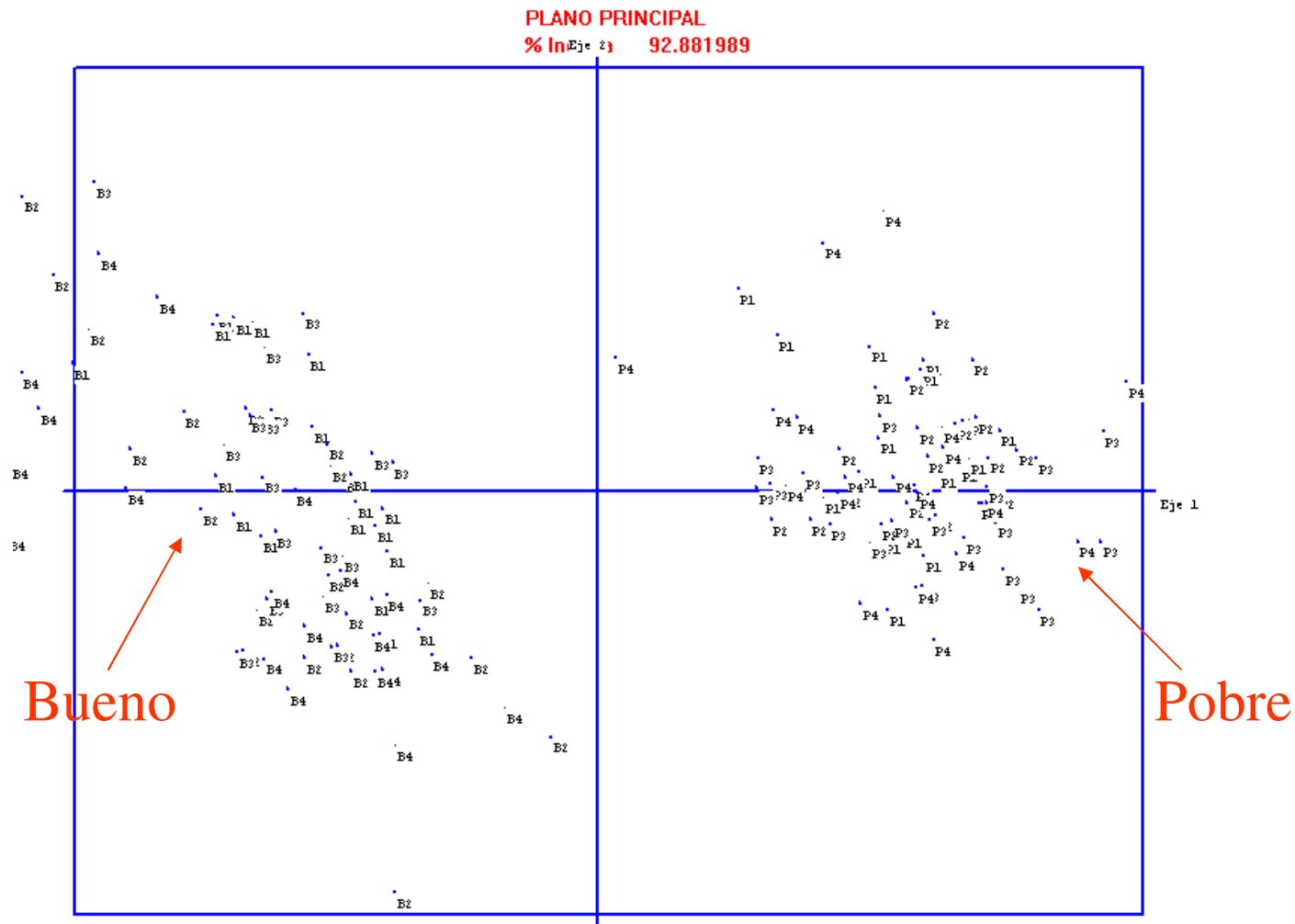
% Inercia c_2 96.419594





CIMPA-UCR

Las Juntas: ACP sin medio



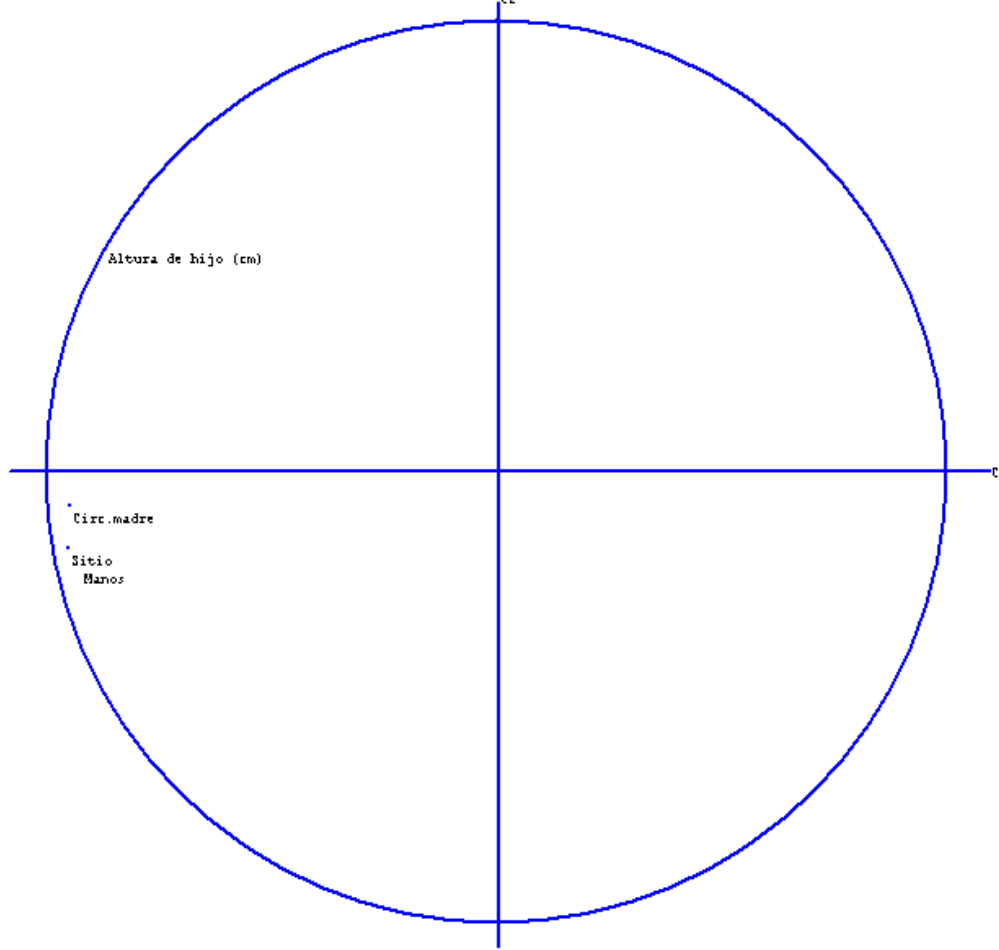


CIMPA-UCR

Las Juntas: ACP sin medio

CÍRCULO DE CORRELACIÓN

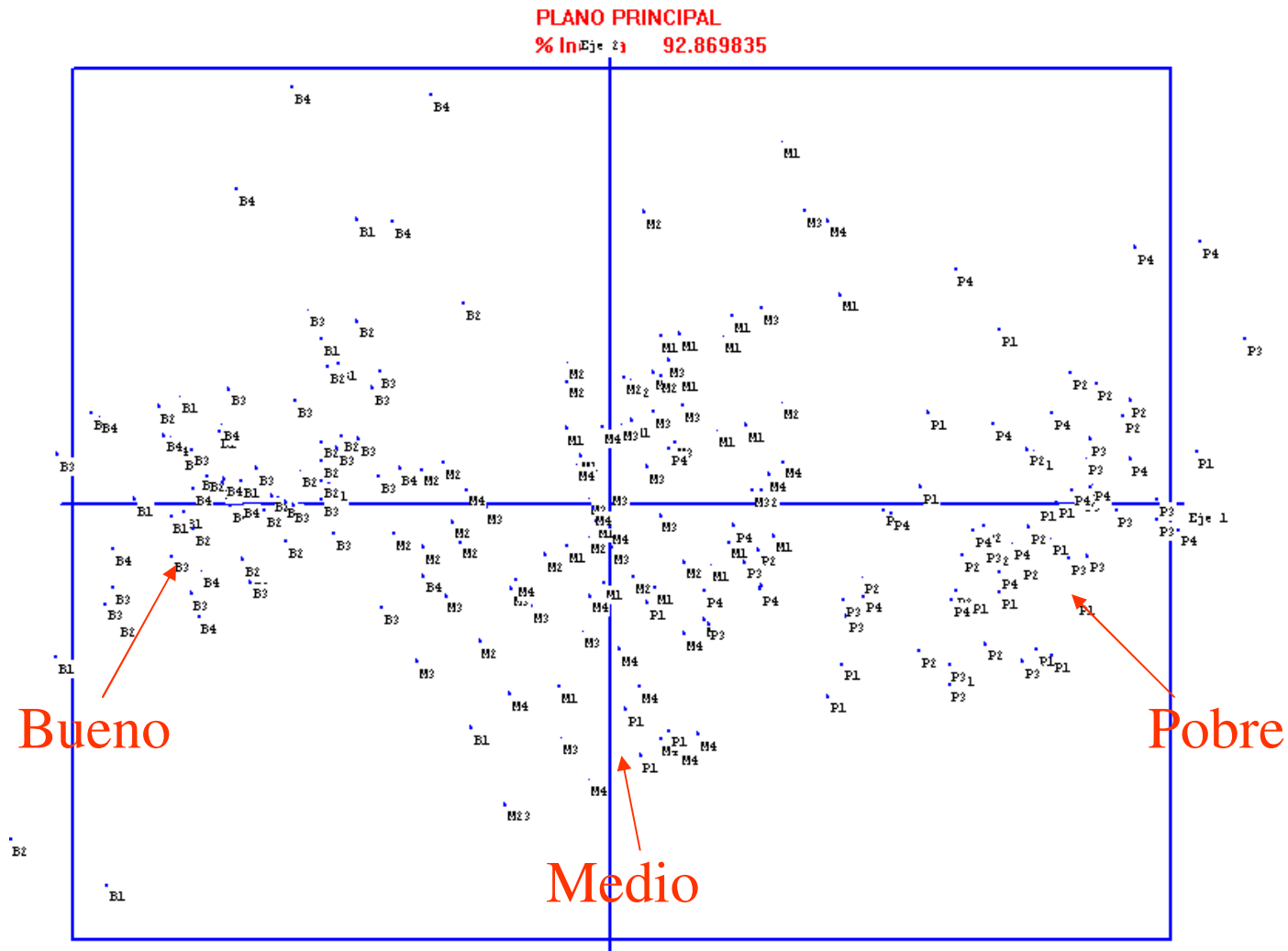
% Inercia λ_2 92.881989





CIMPA-UCR

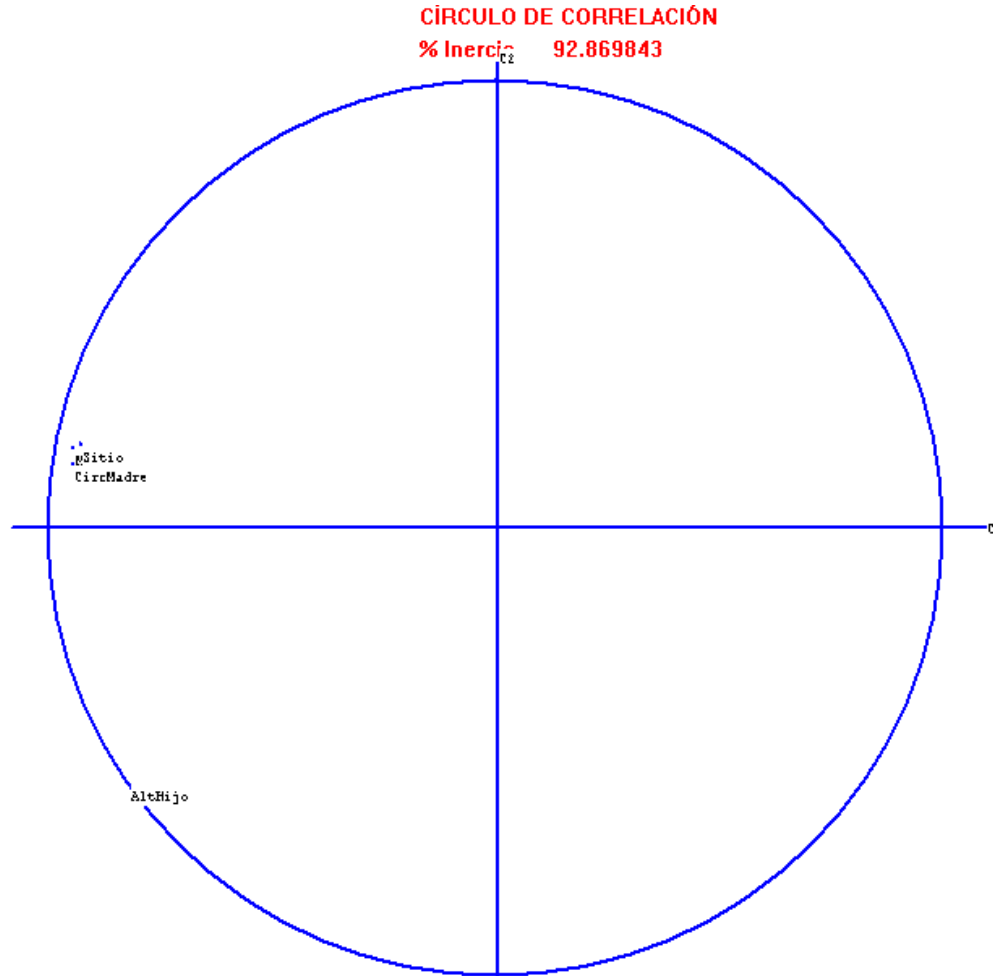
Cartagena: ACP completo





... -UCR

Cartagena: ACP completo

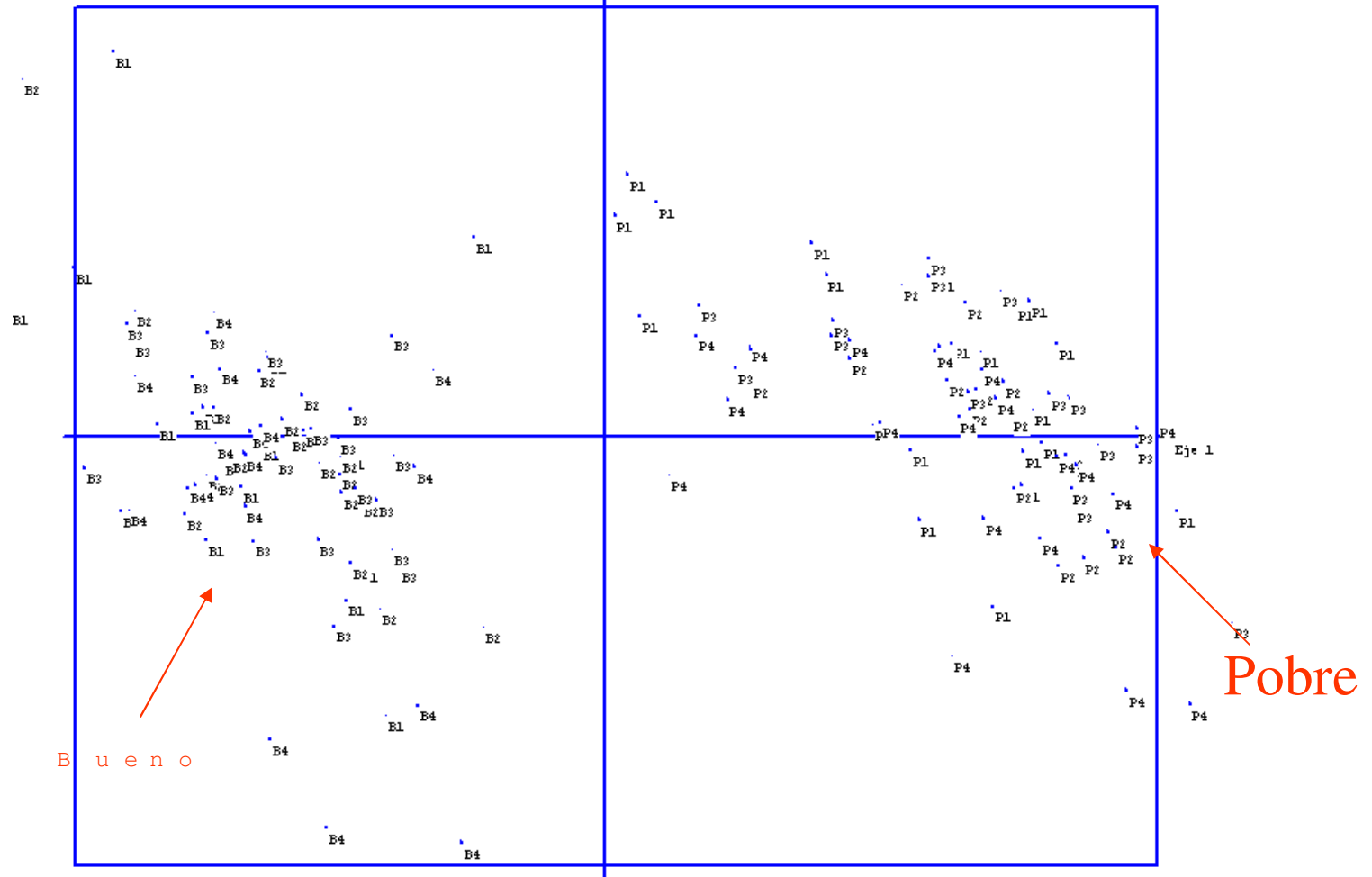




CIMPA-UCR

Cartagena: ACP sin medio

PLANO PRINCIPAL
% lnEje 2: 94.807709





CIMPA-UCR

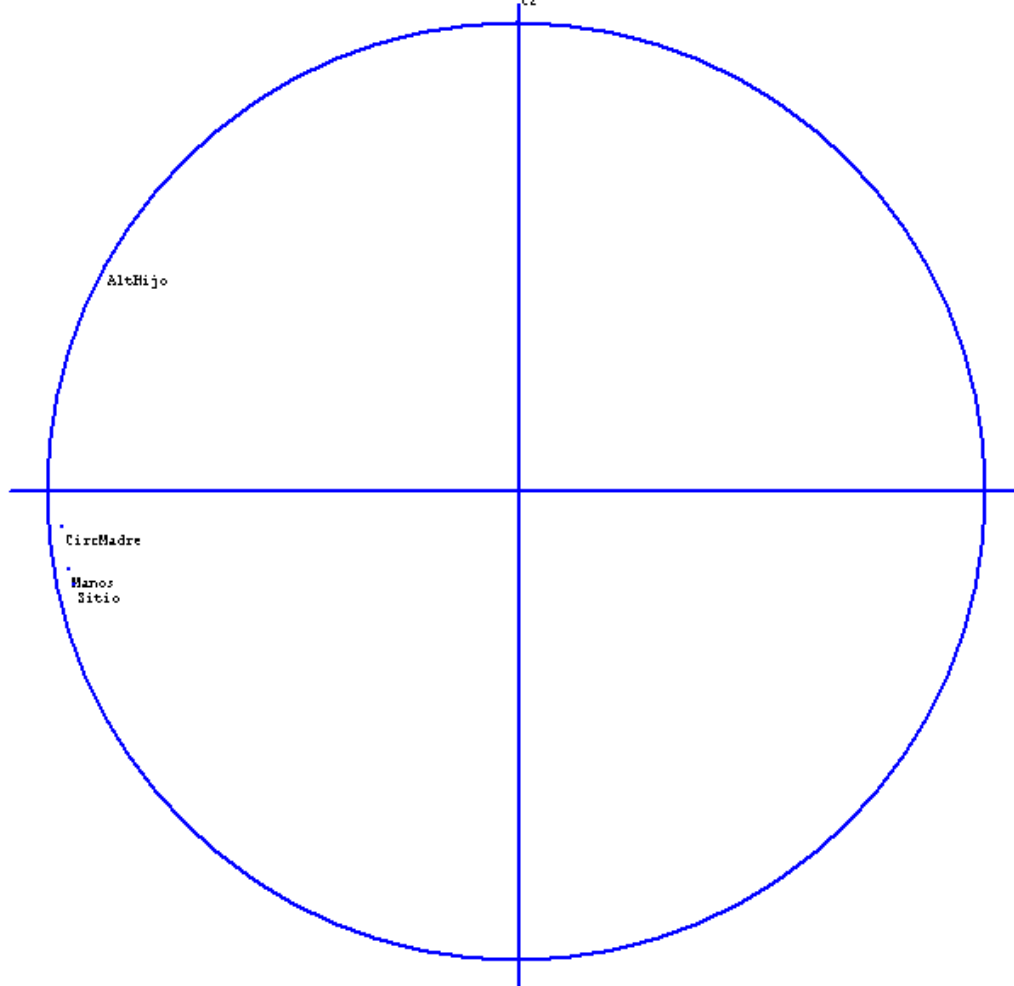
Análisis en Componentes Principales

C a r t a g e n a : A C P s i n

medio

CÍRCULO DE CORRELACIÓN

% Inercia λ_2 94.807709

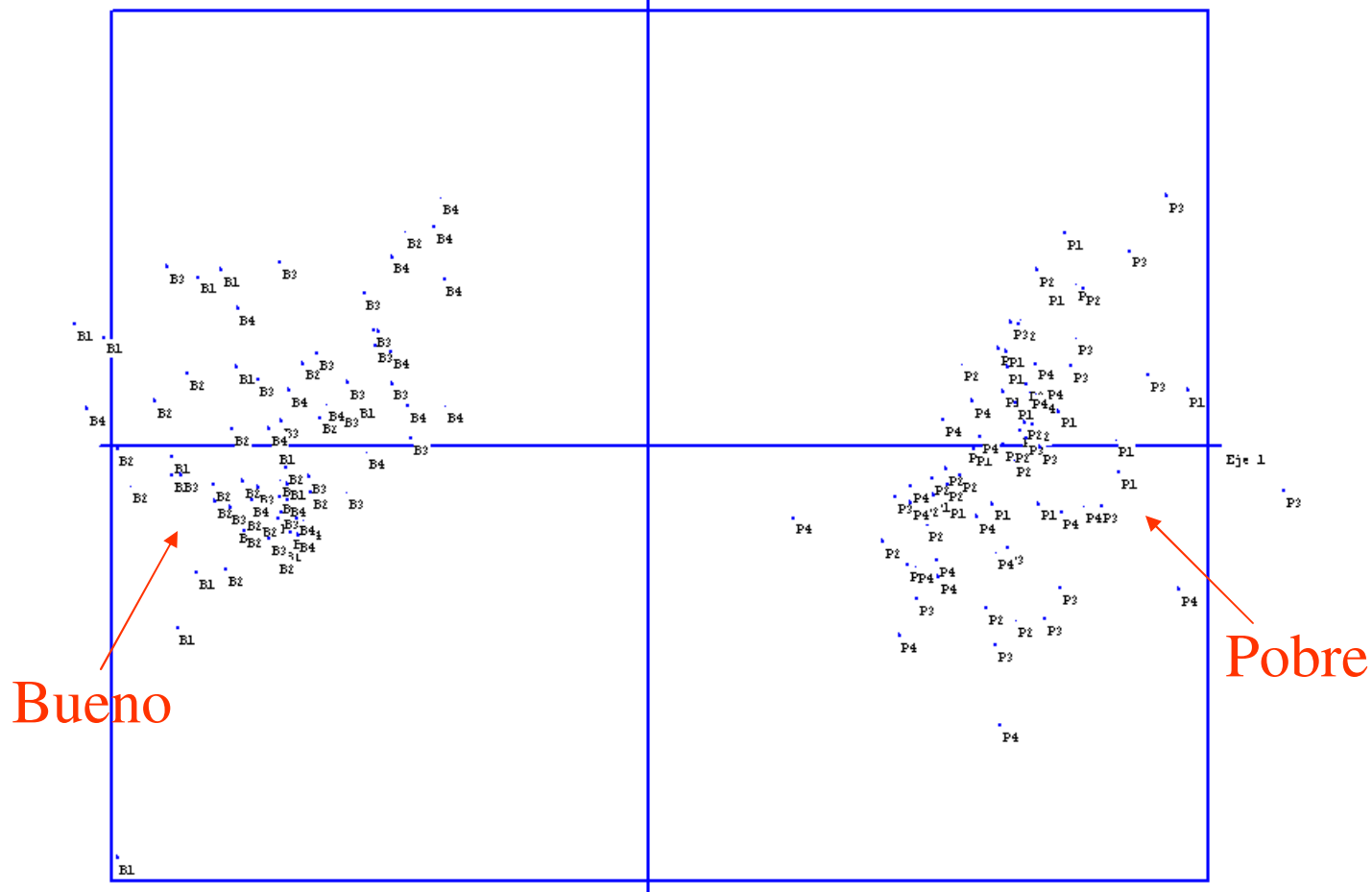




CIMPA-UCR

San Pablo: ACP sin medio

PLANO PRINCIPAL
% InEje 1: 96.322723



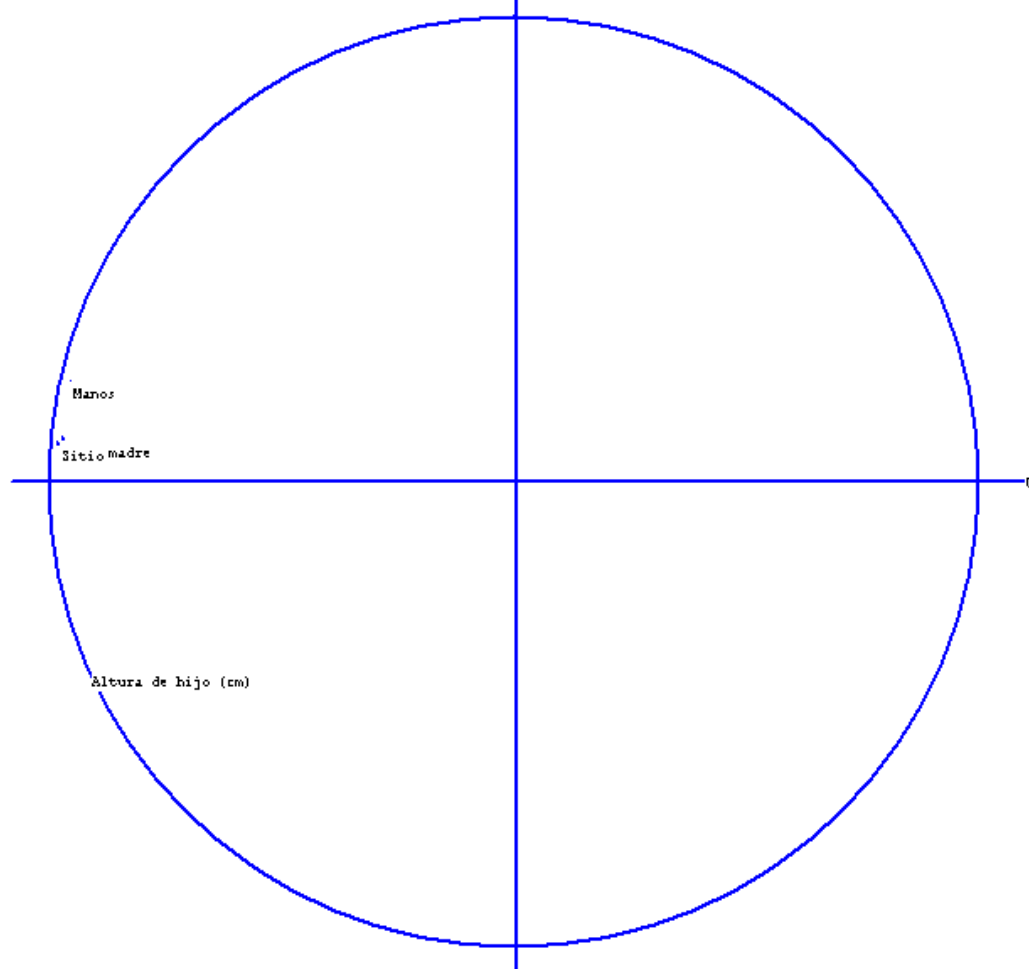


CIMPA-UCR

San Pablo: ACP sin medio

CÍRCULO DE CORRELACIÓN

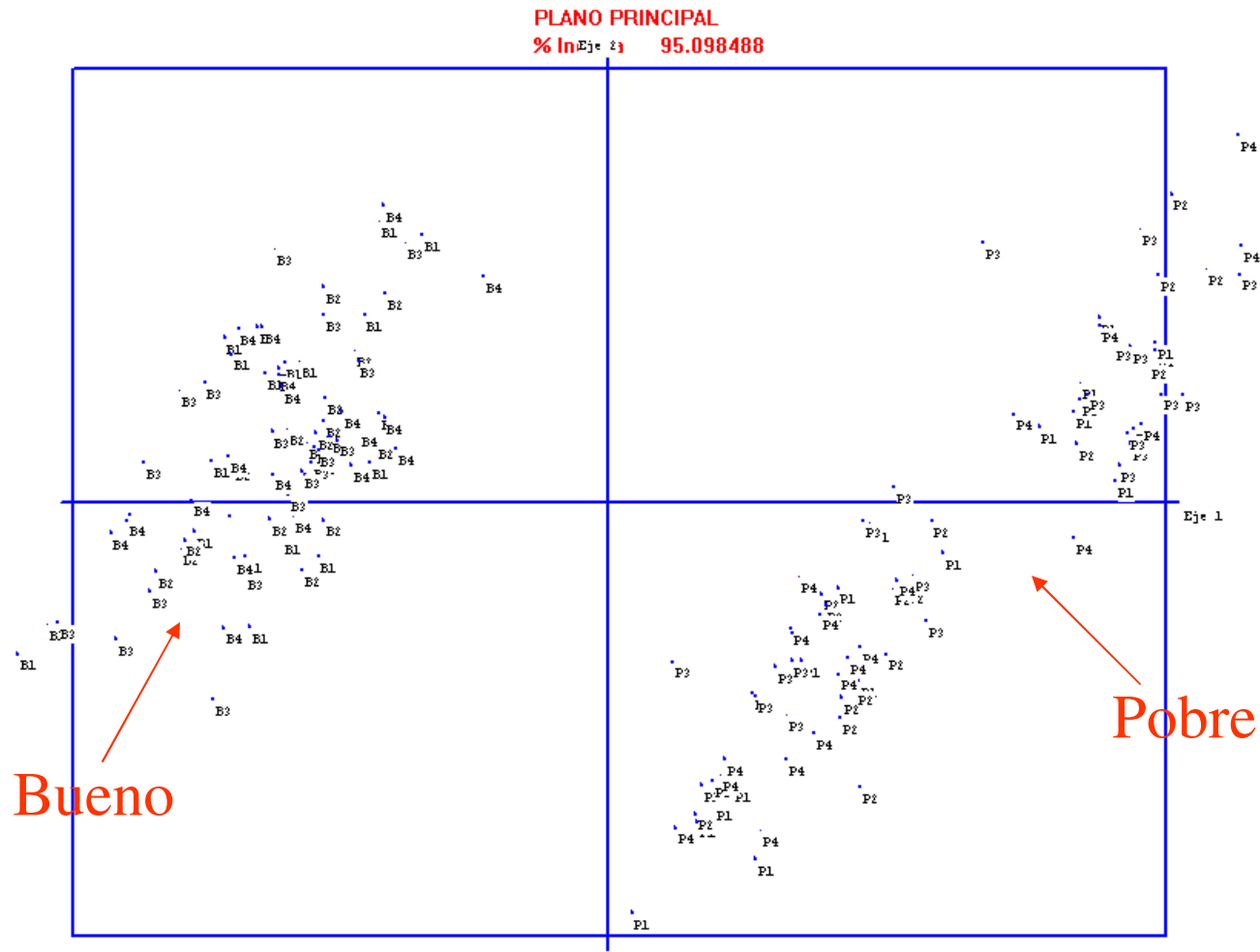
% Inercia t_2 96.322723





CIMPA-UCR

El Esfuerzo: ACP sin medio



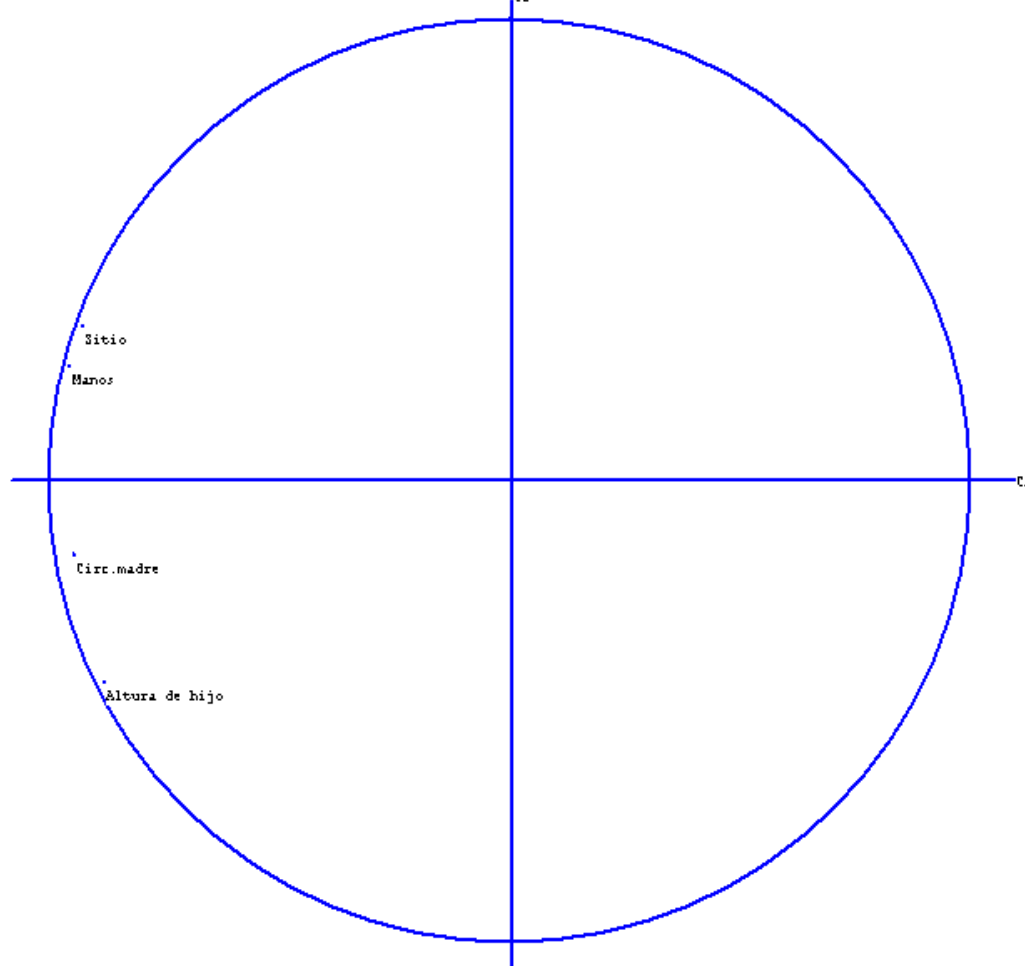


CIMPA-UCR

El Esfuerzo: ACP sin medio

CIRCULO DE CORRELACION

% Inercia c_2 95.098488

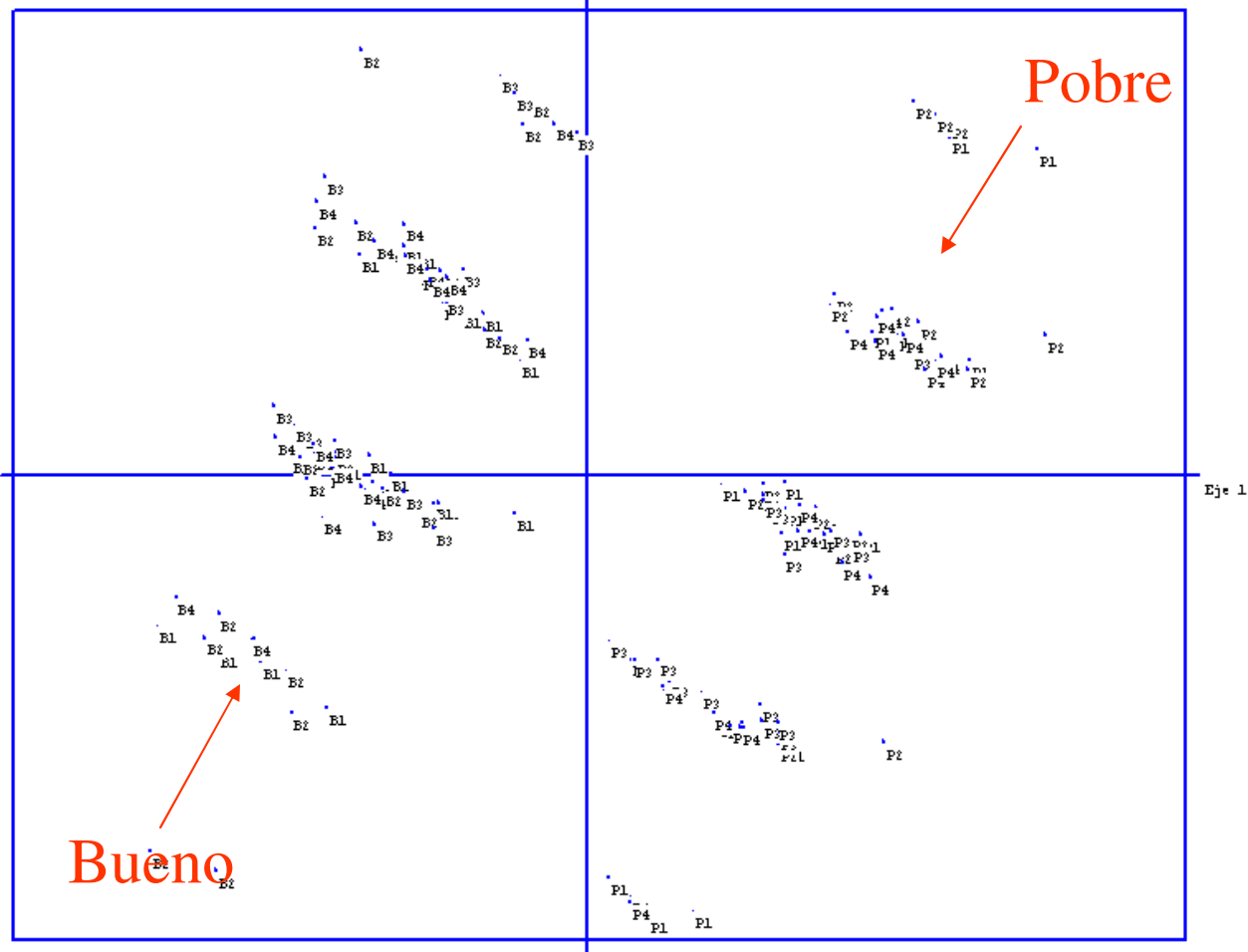




CIMPA-UCR

Palo Verde: ACP sin medio

PLANO PRINCIPAL
% Inercia: 87.894287



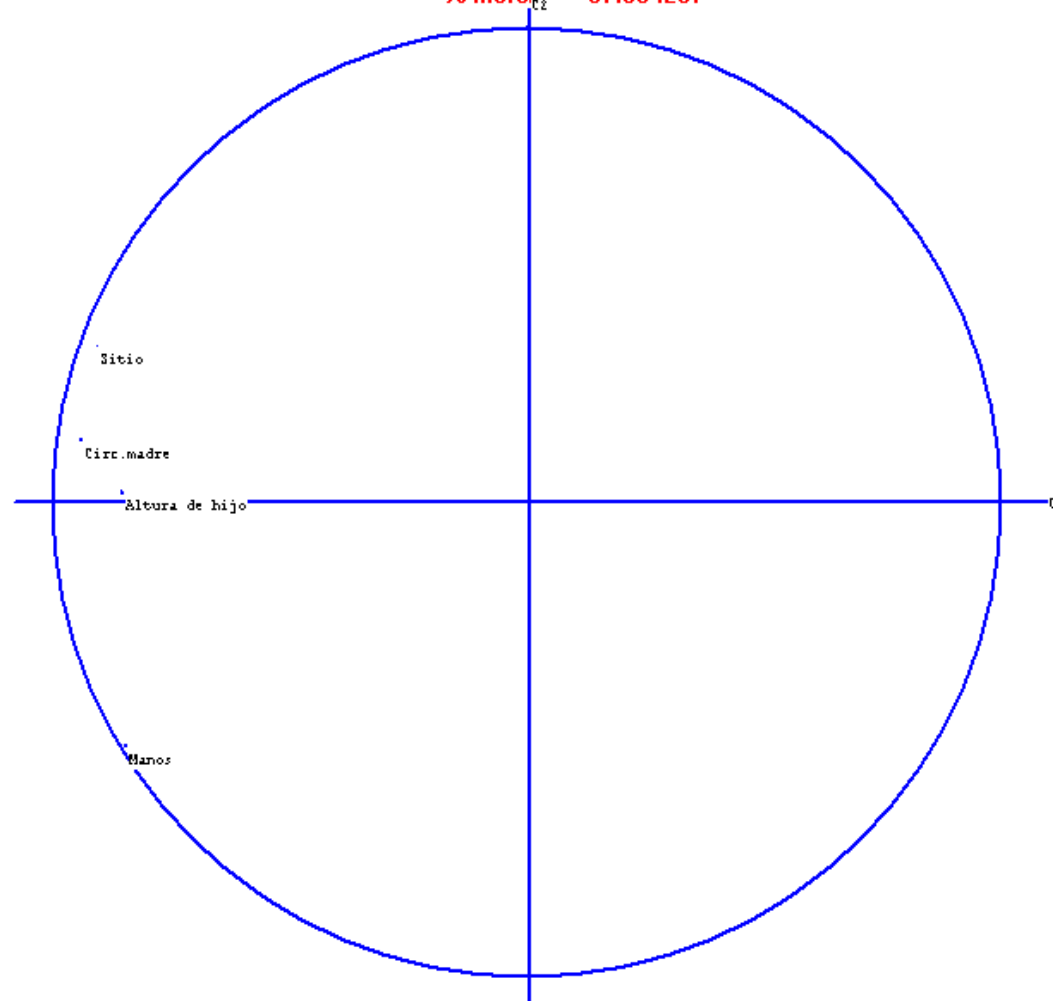


CIMPA-UCR

Palo Verde: ACP sin medio

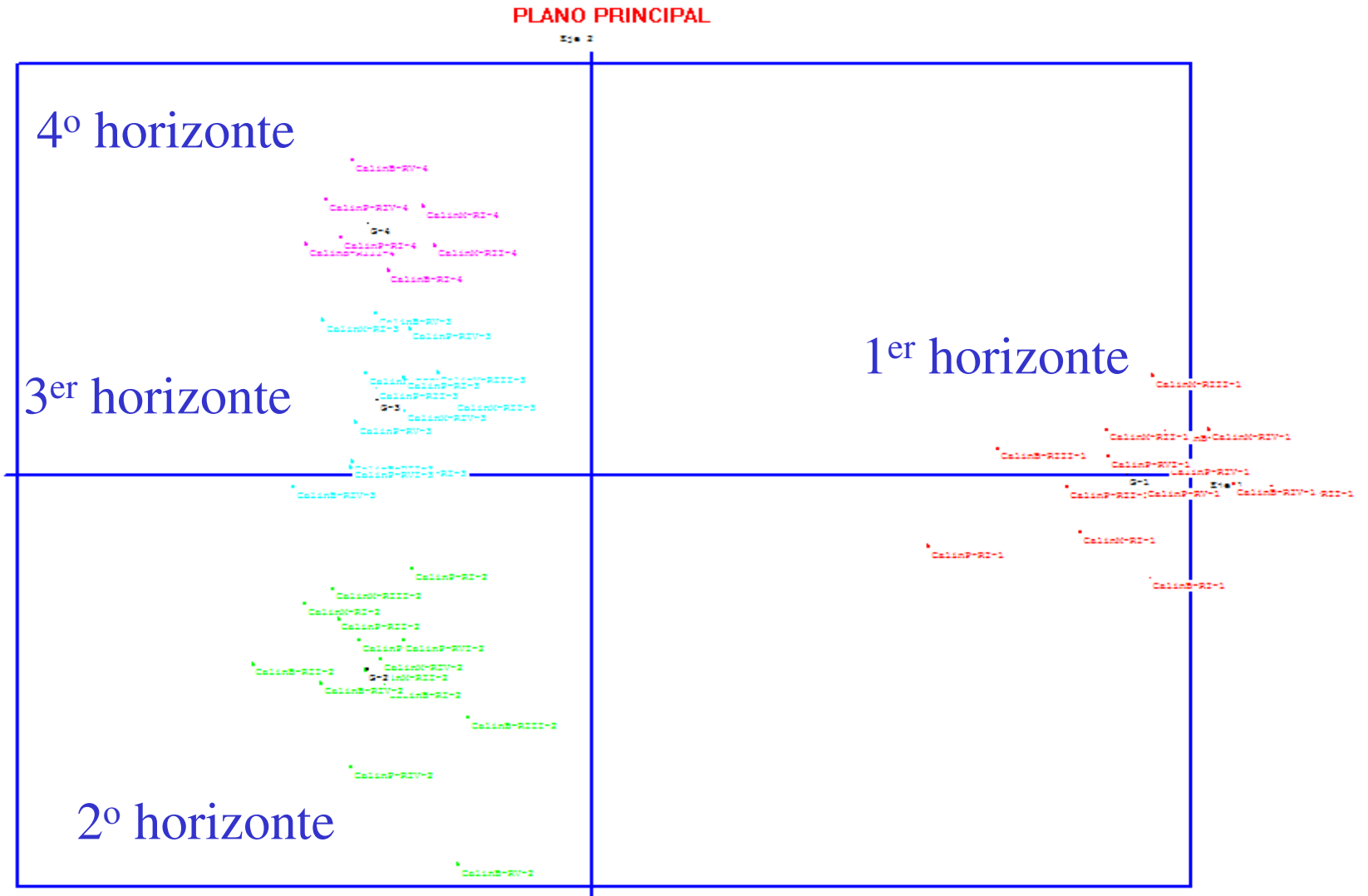
CÍRCULO DE CORRELACIÓN

% Inercia c_2 87.894287





Análisis de los horizontes





CIMPA-UCR

Círculo de correlaciones

